Kommentarer och frågor från övriga deltagare i antologin med svar från Ulf Persson

Elisabeth Ahlsén

A. Kommentarer och frågor till Ulf Persson

Ulf Perssons presentation av matematikens metoder är relativt teknisk för en icke-matematiker i sina exempel. Dessa kommenteras därför inte här, utan frågorna är mer utifrån ett allmänt och tvärvetenskapligt perspektiv. Det kan vara lite svårt att i artikeln se skogen för alla träd, så därför kommer några mer specificerande frågor.

1. Bör matematikundervisning vara konkret eller inte? Vilka är de eventuella för- respektive nackdelarna? Detta berörs men att få frågan utvecklad tydligare vore intressant för läsaren.

2. Det nämns att den logiska basen för matematiken enligt Peirce hör till moralfilosofin. Förklara gärna hans resonemang. Är det riktigt, enligt dig?

3. Framställningen omfattar ett ganska brett fält. Var går gränserna för matematik i förhållande till ämnen som filosofi, teknologi, fysik?

4. Är allt i kapitlet att betrakta som tillhörande ämnet matematiska metoder? Vad är det mest centrala som rör just matematiska metoder?

5. Kommentera gärna vilket förhållande och beroende som finns mellan matematik och filosofi.

6. Har du själv en matematisk ”favoritmetod” – i så fall vilken och varför?

B. Ulf Persson (UP) Svar och svarskommentarer till Elisabeth Ahlsén (EA)

EA Fråga 1: Bör matematikundervisning vara konkret eller inte? Vilka är de eventuella för- respektive nackdelarna? Detta berörs men att få frågan utvecklad tydligare vore intressant för läsaren.

UP Svar på EA fråga 1: Matematikundervisningen är väl ganska konkret, dock för att kunna förstå matematik måste man vara kompetent att på egen hand kunna abstrahera annars rör det sig inte om matematisk kunskap. Ett exempel: Jag må ha varit 5-6 år när jag av min far informerades om att 30+30=60. Jag visste redan att 3+3=6 och jag minns den spontana känslan av att det finns ett system och därefter förstod jag hur talsystemet var uppbyggt. Att formulera denna förståelse var jag då inte mäktig, och jag vet inte ens om jag skulle vara det idag heller. Minnet av denna händelse är fortfarande mycket livlig, jag stod vid en hässja under slåttern vid mina morföräldrars gård utanför Nordmaling. Sådana upplevelser brukar gå under namnet Aha-upplevelser och det är typiskt för inlärningen av matematik. En abstrakt insikt kan inte förmedlas utan endast provoceras fram av ett konkret exempel. Sedan är det en annan sak vad som menas med konkret, kriteriet för detta ändras under individens utvecklingshistoria. Sedan kan man diskutera hur konkret man skall vara under omständigheterna, det talas ibland om att man skall dansa fram matematiken, eller gå ut i skogen och räkna kottar. Motoriska övningar må ha sitt berättigande inom fysisk och språklig fostran men knappast inom matematiken som är en utpräglat mental företeelse. Jag kan också påpeka att när jag kom först i kontakt med de Platonska kropparna tidigt i tonåren förfärdigade jag modeller av dessa med hjälp av de kartonger man fick när man handlade kläder. Jag var mycket dålig i slöjd, men fascinerad av en trädbit som hade både längd, bredd och tjocklek, medan en kant (en linje) hade bara längd (tittade man på en kant med förstoringsglas så ändrades denna inte, den var lika tunn). Vidare anammade jag begreppet skala ögonblickligen. Med andra ord det enda jag minns från slöjden med behållning var denna anknytning med matematiken, det var inte så att matematiken blev intressant tack vare kopplingen till slöjden. Dock skall det inte förnekas att denna koppling mellan matematiken och en fysisk verklighet är av stort värde och kanske mest observeras och uppskattas av de matematiskt lagda, ty de som upplever matematiken bara som ett sadistiskt skolämne ser spontant inga samband. Sedan kanske jag skall tillägga att mitt infantila intresse för sport (vi går alla genom en sådan period) var grundat på 'siffror' framför allt som det uttrycker sig i fri-idrotten.

EA Fråga 2: Det nämns att den logiska basen för matematiken enligt Peirce hör till moralfilosofin. Förklara gärna hans resonemang. Är det riktigt, enligt dig?

UP Svar på EA fråga 2: Vad jag vill minnas för inte Peirce något längre resonemang utan bara noterar det. Jag höll spontant med honom fastän jag inte tänkt i dessa banor. Peirce gör en skillnad mellan matematisk logik, där han var en av pionjärerna, och den logik som ligger till grund för det matematiska resonemanget (till skillnad från det matematiska tänkandet som går utöver logiken). Rättvisa och logiskt tänkande upplevs av människan som mycket närstående, att bryta mot det väcker vår indignation. Den matematiska logiken är en del av matematiken, medan det logiska tänkandet utgör själva grundvalen, den moraliska om man så vill. Peirce påpekar på ett annat ställe att matematikern behöver inte kunna någon logik, det logiska tänkandet är inneboende och något han knappast behöver vara medveten om. Om man vill tänka på logiken logiskt gör man matematik av den och därmed blir det en del av matematiken. Sanningstabeller, som lär ha introducerats av Wittgenstein men som jag misstänker går tillbaka till stoikerna, åtminstone i implicit form, är ett exempel på matematisk logik. Med sanningstabeller kan man ge en formell och instrumentell tolkning av grundläggande logiska begrepp som implikationer, negationer, och, eller, utan att ens behöva gå in på vad de innebär. En liten 'soduko' uppgift är att visa att endast två av dessa konnektiver behövs för att uttrycka dem all genom att göra detta explicit. Vad är vinsten med detta? Att hjälpa typografen innan digitaliseringen? När man resonerar om logiken använder man logiken, men denna självreferens bryts av att när logiken studeras blir den ett objekt och får således en annan innebörd, men den intuitiva logik man resonerar genom studeras inte och blir därmed inget begrepp utan utgör på den metafysiska nivån en moralisk kraft. Man kan tala om mängden av alla mängder, men den mängden kan endast ses i metaforisk mening, om den ges en teknisk mening och behandlas som mängder i gemen hamnar vi i Russellparadoxen. Lite mera fantasifullt kan man hävda att judarnas obenägenhet att sätta namn på Gud är av liknande ursprung.

EA Fråga 3: Framställningen omfattar ett ganska brett fält. Var går gränserna för matematik i förhållande till ämnen som filosofi, teknologi, fysik?

UP Svar på EA fråga 3: Matematikens gräns till filosofin har diskuterats ovan. Det gäller speciellt frågan om vetandets underbyggnad, speciellt matematikens grundvalar. Alla seriösa filosofer har klassiskt engagerats av matematiken, och även många oseriösa (franska strukturalister som nyttjar matematiken för glansens skull). Platonismen är ett klassiskt exempel på samröret mellan matematik och filosofi. Fysiken blev en vetenskap först i och med att den blev matematisk. Galileo kan ses som den moderne pionjären därvidlag, känd för sitt yttrande om fysikens lagar i det språk som kallas matematiken; man kan dock problematisera detta med att reducera matematiken till ett språk, vilket i mitt tycke är gravt missvisande. Galileo hade givetvis föregångare, man behöver bara nämna Arkimedes, och man kan se den euklidiska geometrin som ett amalgemang av matematiken och den rumsliga utsträckningens fysik, vilket jag betonar i min text. Vad som klassiskt skiljer matematiken från fysiken är den empiriska komponenten, i fysiken gör man experiment (även om man nu även i matematiken kan tala som sådant i och med intrånget av datorer) och man 'bevisar' lagar via experiment och inte genom ren deduktion som i matematiken. Dock har försök gjorts att axiomatisera fysiken. Arkimedes resonerar mycket rigoröst och matematiskt när han försöker härleda fysikaliska lagar som inom hydrodynamiken (Arkimedes princip) och Newton skriver sin Principia i Euklides anda, men detta är en efterhandskonstruktion och har föga att göra med upptäcksvägen. I fysiken konfronteras man med en värld man försöker tolka medan man i matematiken skapar en vars manifestationer först i efterhand träder fram. Man skall dock inte förväxla detta med att betrakta den matematiska verkligheten som ett fantasifoster; den fysiska världen är 'fysikaliskt' påtaglig, den påverkas av oss oavsett om vi vill eller inte.

När det gäller teknologin har den många beröringspunkter med matematiken. Både matematikern och ingenjören måste hantera en obeveklig logik, mental i matematikerns fall, materiell i ingenjörens. Ett matematiskt resonemang som i ett formellt bevis liknar mycket en maskin som måste fungera, de olika delarna måste passa in. I och med datorernas utveckling har vi ni även ett mellanting mellan matematiken och ingenjörskonsten, nämligen programmeraren. Beviset, koden och maskinen är alla nära besläktade. Den matematiska vardagen är fylld av teknik, d.v.s. matematiska resonemang blir gärna mycket tekniska, som Peirce påpekade, de långa deduktiva kedjorna i matematiken har ingen motsvarighet hos andra mentala verksamheter som filosofi, historia, etc, men har dock en motsvarighet inom sofistikerade teknologiska apparater (maskiner). Tingens obeveklighet (mentala såväl som materiella, och varje tanke som underställs tanken blir till ett ting ett närmast materiellt objekt) tvingar fram en attityd av ödmjukhet och saklighet som leder till åtminstone potentialen för ömsesidig respekt. Ingenjören kan dock ignorera matematikern såsom världsfrånvänd (som matematikern Ulam påpekade, matematiska frågeställningar om urvalsaxiomets giltighet, har inte den minsta praktiska betydelse, liksom alla frågor som rör högre kardinaltal, man kan t.o.m. ifrågasätta deras matematiska relevans!) medan matematikern är något av en snobb, och hävdar att utöver det rent tekniska innehåller matematiken en visionär komponent som inte föreligger hos ingenjören.

EA Fråga 4: Är allt i kapitlet att betrakta som tillhörande ämnet matematiska metoder? Vad är det mest centrala som rör just matematiska metoder?

UP Svar på EA fråga 4: Det mesta i kapitlet rör matematiska metoder, men eftersom dessa måste illustreras av relativt elementär och oteknisk matematik, gör de knappast matematiken och matematikerns arbete rättvisa. Dock den centrala delen utgörs av den revolution som kartesiska koordinater medförde. Det ändrade inte på studieobjektet som sådant, nämligen den euklidiska geometrin, men den ändrade fundamentalt sättet att tänka på geometrin. De deduktiva kedjorna ersattes av 'räknande' (men givetvis är räknandet logiskt betvingat men det är mekaniskt på ett helt annat sätt än det deduktiva tänkandet, och därmed mera generellt. Denna var endast en av de metodologiska revolutioner som matematiken har genomgått under de senaste århundranden, infinitesimalkalkylen är en annan för vilken de kartesiska koordinaterna beredde vägen.

EA Fråga 5: Kommentera gärna vilket förhållande och beroende som finns mellan matematik och filosofi.

UP Svar på EA fråga 5: Denna fråga har till en del besvarats genom frågorna 2. och 3. Jag skall bara tillägga att det mest fascinerande med matematiken är inte dess sanningsvärde utan hur olika, till synes vitt skilda delar av matematiken är förenade på närmast outgrundliga vägar. Detta ingår i vad jag ovan refererade till som den visionära komponenten. Välkända exempel på detta är teorin för komplexa funktioner, d.v.s. funktioner av komplexa variabler som har ett något tekniskt rigididetsvillkor och som spelat en stor roll inom fysiken (de kan betraktas som konforma avbildningar mellan områden i planet) och ren talteori, närmare bestämt primtalsfördelningar, vilket etablerades av den tyske matematikern Riemann i mitten av 1800-talet och vars hypotes utgör den moderna matematikens mest glorifierade problem.

Om man talar om akademiska institutioner så brukar traditionellt matematiska logiker återfinnas på filosofiinstitutioner medan en del har presenterat sig som datavetare.

EA Fråga 6: Har du själv en matematisk ”favoritmetod” – i så fall vilken och varför?

UP Svar på EA fråga 6: Det närmaste jag kan komma att presentera en 'favoritmetod' är beräkningar av eulerkaraktäristiker, men denna del av mitt ursprungliga kapitel ströks av allehanda skäl, inte bara utrymmesskäl, så jag kan inte gå närmare in på detta.

Jens Allwood

A. Kommentarer och frågor till Ulf Persson

Kapitlet innehåller ett antal intressanta reflektioner om och exempel på matematik och matematiska sätt att resonera, men inte så mycket om författarens egna val av metoder.

Allmänna frågor

1. Vad skulle du beskriva som metoder för att nå nya matematiska insikter och resultat? Finns det några andra metoder än att läsa och diskutera och sedan sätta sig ner och tänka?

2. Ibland görs en skillnad mellan vetenskapliga upptäcktsmetoder och vetenskapliga berättigande-metoder (discovery and justification). Matematiska bevis verkar vara mer berättigande-orienterade än upptäcktsorienterade. Finns det några upptäckandemetoder?
3. Har du några egna metoder när du sysslar med matematik?
4. Kan man söka sanning i matematiken? Vad innebär detta i så fall? För mig verkar det som man eventuellt får nöja sig med motsägelsefrihet och konsensus bland matematiker som de slutliga kriterierna. Korrespondens verkar kräva Platonism. Hur ställer du dig till detta?

Frågor på texten

5. Det finns språk utan räkneord. Detta kan göra det svårare att räkna. Varför måste alla vara överens om att räkna? Är det inte snarare så att matematisk notation utvecklats bland annat för att alla inte var överens?
6. Är verkligen alla postulats och axioms sanningsvärden tautologiskt sanna? I Isac Newtons ”Principia” postuleras att rummet är oändligt och att tidens gång är oberoende av om det sker någon förändring. I relativitetsteorin gäller inte längre dessa postulat. Är det inte i själva verket intressant att ha rätt icke-tautologiska postulat, åtminstone om det gäller något som inte bara är en matematisk kalkyl?
7. Det finns numera logiker som tillåter kontradiktioner (dialetheism). Det finns logiker som inte tillåter indirekta bevis (t.ex. intuitionistiska). Är inte detta alternativa logiker?
8. (en exkurs från matematik?) Varför anser du att demokratins kärna inte är att avgöra frågor genom majoritetsomröstning utan i ställe transparens. Antag ett politiskt system där majoritetsomröstning inte är möjlig. Kan detta vara en demokrati? Antag sedan ett politiskt system där alla beslut fattas transparent av en diktator. Kan detta vara en demokrati? Anser du att Sverige är en demokrati? Anser du att ansvarsfördelningen mellan svenska myndigheter är transparent? Anser du att i Sverige det inneboende värdet i argumentet (sak) och inte identitet på personer som framför det (person) är det avgörande? Är inte Sverige en demokrati just i kraft av det har majoritetsomröstning snarare än av att det har transparens och upprätthållande av distinktionen mellan sak och person. Majoritetsomröstning verkar däremot vara ett nödvändigt och eventuellt även tillräckligt villkor för demokrati. Transparens och avsaknad av ”ad hominem ” argument är önskvärda egenskaper men varken nödvändiga eller tillräckliga för demokrati.
9. Varför innebär det faktum att Peirce ansåg matematik (och logik) vara normativa att de tillhör moralfilosofin? Finns det inte andra normer än de moraliska?
10. (i)Är inte axiom mer som en ”semantik” än en ”grammatik” för det matematiska språket? (ii) Finns det något ”naturligt språk” vi uppfunnit själva?
11. Vad anser du om logiker som tillåter härledning av kontradiktioner (t.ex. i dialetheism)? Se t.ex. Priest et al (2018).
12. (fotnot 10) I Pompeji finns bevarade platta målningar.
13. Kan det verkligen tyckas banalt att uppfinna nya notationer i matematik?
    1. Är de inte snarare essentiella? Skulle matematiskt tänkande, annat än på basnivå, vara möjligt utan extern skriftlig notation?
14. Har du definitioner av ”förståelse” och ”förklaring”? Förklara hur du gett illustrationer av båda begreppen.

Referens

Priest, G., Tanaka, K., Weber, Z. (2018). Paraconsistent Logic. I The Stanford Encyclopedia of Philosophy.

B. Ulf Persson (UP) svar och svarskommentarer till Jens Allwood (JA)

Allmänna frågor

JA Fråga 1: Vad skulle du beskriva som metoder för att nå nya matematiska insikter och resultat? Finns det några andra metoder än att läsa och diskutera och sedan sätta sig ner och tänka?

UP Svar på JA fråga 1: I matematikens väsen ingår att den är tillgänglig för tanken. I den mån andra vetenskaper är tillgängliga för tanken är det på grund av matematisk tillämpning som inte endast behöver vara explicit. Matematikens tillgänglighet för tanken är precis det som fascinerar matematiker samtidigt som den kan stöta bort andra.

Huruvida att tänka är en metod i matematiken är lite väl vagt men kan ha sitt berättigande på en metafysisk nivå. I mitt kapitel har jag presenterat två mycket konkreta metoder. Att finna kongruenta trianglar i ett klassiskt euklidiskt bevis samt att översätta geometriska frågor till algebraisk manipulation som i den kartesiska geometrin. Det är viktigt att påpeka att både den euklidiska och den kartesiska geometrin studerar samma objekt, det rör sig inte om olika geometrier, men däremot om olika metoder.

JA Fråga 2: Ibland görs en skillnad mellan vetenskapliga upptäcktsmetoder och vetenskapliga berättigandemetoder (discovery and justification). Matematiska bevis verkar vara mer berättigandeorienterade än upptäcktsorienterade. Finns det några upptäckandemetoder?

UP Svar på JA fråga 2: Många matematiskt obegåvade personer som studerar matematik (vilka tycks utgöra en majoritet) blir förvirrade när de ställs inför 'bevis'. How do you do proofs, en närmast uppgiven fråga, ty de är vana vid att ges regler att följa. Detta diskuterar jag i mitt kapitel. Vitsen med ett bevis är att förklara och övertyga, två begrepp som är intimt sammanknippade men inte desto mindre ibland divergerar. Orsaken till det senare är att bevis tenderar att vara formella och därmed lätt uppfattas som enbart verifierande. Man skall även hålla i minnet att bevis, ju formellare de är, är en fråga om efterkonstruktioner. Först efter att man förstått en argumentation kan man formulera den i formen av ett rigoröst bevis (och vad som är rigoröst varierar med omständigheterna, alla bevis innehåller luckor som läsaren förväntas kunna fylla ut vid behov), det är inte så att ett bevis skrivs steg för steg, även om det kan läsas så, det är först när det kan läsas med överblick som man kan säga att det förstås. Man kan jämföra med en text på ett främmande språk, om detta måste stegvis översättas till ett mer bekant språk talar vi inte om förståelse utan om dekodning, det är först när dess mening 'pops up' direkt som vi kan tala om förståelse. Det viktigaste i ett bevis är inte resultatet det leder fram till utan de idéer som det innehåller och som man kan utnyttja i andra situationer. En idé kan inte formuleras i ord såsom ett resultat kan göras utan det ligger inborgat i beviset. Att lära sig matematik är inte en fråga om att memorera resultat (teorem)utan att anamma idéer.

När det gäller upptäcktsmetoder är den kartesiska geometrin ett bra exempel ty det är både handfast och elementärt. Arkimedes fann ut många resultat genom att använda en fysisk intuition, sedan blev det en annan sak att finna ett rigoröst matematiskt bevis som i deduktiv mening berättigade upptäckten (kanske det trots allt ligger något i 'how to do proofs'). Newton använde sin utvecklade infitesmalkalkyl för att finna resultat men när han skrev upp det i Principia gjorde han det på ett euklidiskt sätt. Gränsvärdesbegreppet som var intuitivt självklart fick ingen definitiv rigorös underbyggnad förrän på 1800-talet (Arkimedes var en pionjär och hans argumentation var betydligt mera logiskt rigorös är 1600- och 1700-talets matematik. Som jag ofta brukar påpeka, en logisk rigorös framställning av matematiken är att likna med framställningen av en bild via pixlar. Om man läser av pixlarnas värden dyker ingen bild upp i sinnet.

JA Fråga 3: Har du några egna metoder när du sysslar med matematik?

UP Svar på JA fråga 3: Det finns ett otal metoder på olika nivåer och beror på omständigheterna. Sysslar man med algebraisk manipulering är de tekniska metoderna uppenbart skilda från en mer geometrisk argumentering. Matematisk analys med sina subtila resonemang med oändligheten är mycket väsensskilt från rent algebraiska argument, men de griper in i varandra.

Om jag skall beskriva någon metod som ligger mellan det till meningslöshet gränsande tänkandet och det tekniskt konkreta kan jag inte annat än att påminna mig en metod som jag formulerade som tonåring. Beräkna samma sak på två oberoende sätt och ur denna likhet dra konsekvenserna.

Denna metod beskriver hur många resultat har upptäckts. Ett specialfall är den matematiska induktionen som många läsare har kommit i kontakt med. Ett påstående P(n) skall visas vara sant för alla heltal n, visa att P(1) gäller och att om P(n) gäller så gäller också P(n+1). Det kan vara en formel vars giltighet skall visas, då är problemet att finna formeln må vara en gissning eller en gudomlig inspiration. Härvidlag kan vi särskilja upptäckten från verifieringen. I induktionsbeviset är formeln given, ingen indikation varför just denna kanin har dragits ur hatten, medan själva induktionen är rent mekanisk och ger föga förståelse.

JA Fråga 4: Kan man söka sanning i matematiken? Vad innebär detta i så fall? För mig verkar det som man eventuellt får nöja sig med motsägelsefrihet och konsensus bland matematiker som de slutliga kriterierna. Korrespondens verkar kräva Platonism. Hur ställer du dig till detta?

UP Svar på JA fråga 4: Vad för slags sanning? Sanningen om Gud eller människans natur eller matematiska sanningar? Om man ges en intelligenstest får man något förelagt och skall sedan identifiera det underliggande mönstret. Den fråga man då ställer sig är vad förväntar sig problemställaren ty problemet har inget objektivt svar utan endast ett subjektivt, delar man konstruktörens konventioner är chansen stor att man lyckas väl på testet. Klassiska exempel är att fortsätta en talserie, en sådan uppgift är utan ett givet kontext meningslöst. Detta att gissa vad läraren förväntar sig är en vanlig upplevelse bland elever, som t.ex. i språköversättningar, men personligen har jag aldrig upplevt detta när det gäller renodlade matematiska problem i skolan. Jag har upplevt dem som objektiva på ett helt annat sätt. Visst när det gäller vad som är korrekt och kan publiceras kan vi tala om social konsensus, matematik är någonting som trots allt bedrivs av människor, men det finns alltid övertygelsen om vad människan förmår producera kan senare visa sig fel i en objektiv mening som inte har att göra med rena modenycker, som i så många andra akademiska sammanhang. Skall man tala om sanning i en rent logisk mening hamnar man mycket riktigt i begreppet motsägelsefrihet. Ett formellt axiomsystem kan liknas vid en maskin. Det är meningslöst att tala om axiomens sanningshalt, liksom i en maskin tala om de enstaka komponenternas ändamålsenlighet, i viss mening behöver inte axiomsystemet beskriva något med innehåll alls (detta utgör en parodi på matematiken som framfördes av bland annat Russell och Wittgenstein), dock såsom ett axiomsystem utgör det en entitet som man kan ställa relevanta frågor om, som t.ex. dess konsistens. Men hur löser man detta? Genom att sätta upp ett nytt axiomsystem? Snarare än att matematiken kan ses som ett utskott av logiken, kan man tillämpa matematiken på logiken, och det var denna insikt som genomsyrade logikens pånyttfödelse under dess gyllene årtionde 30-talet - och har sedan dess blivit en tillämpad gren av matematiken. Gödel visade med matematiska metoder (om en blygsamma sådana) att ett givet formellt system tillräckligt kraftfullt för att vara intressant (och vad detta egentligen innebär framgår ut beviset, men brukar sammanfattas att kunna logiskt inkapsulera de hela talen) har satser som inte kan bevisas i ett ändligt antal steg (och hur bevisar man en sats i ett oändligt antal steg frågade sig Hilbert retoriskt, denne var en av pionjärerna i matemematikens formalisering, inte för att han var formalist till temperamentet, utan hoppades kunna utsätta det matematiska tänkandet för en matematisk analys), speciellt inte dess konsistens. Såsom ett matematiskt bevis är inte Gödels bevis speciellt komplicerat, svårigheten ligger i en viss subtilitet som ofrånkomligen uppstår när man vill bädda in metaspråket i vilket man beskriver ett objekt i själva objektet, vilket inte kan göras helt fullständigt. I viss mening innehåller beviset ett oändligt antal steg i och med att läsaren uppmanas att i tanken gå igenom ett oändligt antal fall. Om man gör detta i praktiken kommer man aldrig fram. Exempelvis hur bevisar man att ett system är motsägelsefritt? Man går igenom alla slutsatser man kan dra på et systematiskt sätt och finner man inga kan man dra slutsatsen att systemet är motsägelsefritt. Detta kan inte göras i praktiken, det enda man kan hoppas på att man påträffar en motsägelse, då har man bevisat att systemet är inkonsistent, man kan inte bevisa motsatsen, men det behöver inte betyda att det inte är sant, själva begreppet motsägelsefrihet existerar och det kan vara så att detta är fallet även om det ligger bortom mänsklig förmåga. Frågan har ett innehåll och huruvida det är sant eller falskt är meningsfullt. Detta är ett dilemma i vetenskapen i stort, alla resultat man kommer fram till är provisoriska, men det betyder inte, pace postmodernisterna att Sanningen med stort S inte existerar. Kopplingen till Platonismen och ytterst dess religiösa innebörd är klar. Dock kan man inte ur detta förkasta Platonismen för parafrasera Collingwood, att så göra vore en platonisk och religiös handling i sig själv.

Ur detta framgår kanske att matematiker inte bekymrar sig om Gödels sats, den tillhör den matematiska metafysiken.

Frågor på texten

JA Fråga 5: Det finns språk utan räkneord. Detta kan göra det svårare att räkna. Varför måste alla vara överens om att räkna? Är det inte snarare så att matematisk notation utvecklats bland annat för att alla inte var överens?

UP Svar på JA fråga 5: Om alla inte är överens om att räkna måste vi komma överens av praktiska skäl, så mycket riktigt man kan hävda att räkneorden (den matematiska notationen) utvecklades av dne anledningen, men inte för att befästa det hela utan för att uppnå konsensus, att höja sig över det subjektiva.

JA Fråga 6: Är verkligen alla postulats och axioms sanningsvärden tautologiskt sanna? I Isac Newtons ”Principia” postuleras att rummet är oändligt och att tidens gång är oberoende av om det sker någon förändring. I relativitetsteorin gäller inte längre dessa postulat. Är det inte i själva verket intressant att ha rätt icketautologiska postulat, åtminstone om det gäller något som inte bara är en matematisk kalkyl?

UP Svar på JA fråga 6: I och med att fysiken Principia gavs en formellare presentation var det möjligt att identifiera postulat (axiom om innehållet) och axiom (axiom om själva resonerandet, som är betydligt vanskligare att formulera) blev det möjligt att ifrågasätta mer och mer. Det man inte kan formulera kan man inte heller ifrågasätta. När man ger Gud ett namn kan man ifrågasätta honom, rent av förneka honom.

JA Fråga 7: Det finns numera logiker som tillåter kontradiktioner (dialetheism). Det finns logiker som inte tillåter indirekta bevis (t.ex. intuitionistiska). Är inte detta alternativa logiker?

UP Svar på JA fråga 7: Om man formaliserar logiken blir denna något som man kan ändra, men man kan inte formalisera all logik, ty det finns även metalogiken. Den formella logiken reduceras till trafikregler men när man lyfter blicken och ser logiskt på den formella logiken använder man inte den formella logiken. De logiker som laborerar med kontradiktioner inom logiken aktar sig för motsägelser i sitt eget tänkande om den. Varför skall vi inte utesluta det tredje, om vi gör detta hamnar vi i en massa absurditeter, således bör vi inte göra detta utan använda en logik som inte utesluter. Detta påstående är ett exempel på ett metaresonemang, och som sådant ett exempel på ett motsägelsebevis! Vi skall alltså skilja mellan den formella logiken, som är en slags leksakslogik och den omgivande, den förra är en form av konvention, den senare är platonsk och moralisk.

JA Fråga 8: (en exkurs från matematik?) Varför anser du att demokratins kärna inte är att avgöra frågor genom majoritetsomröstning utan i ställe transparens. Antag ett politiskt system där majoritetsomröstning inte är möjlig. Kan detta vara en demokrati? Antag sedan ett politiskt system där alla beslut fattas transparent av en diktator. Kan detta vara en demokrati?

Anser du att Sverige är en demokrati? Anser du att ansvarsfördelningen mellan svenska myndigheter är transparent? Anser du att i Sverige det inneboende värdet i argumentet (sak) och inte identitet på personer som framför det (person) är det avgörande? Är inte Sverige en demokrati just i kraft av det har majoritetsomröstning snarare än av att det har transparens och upprätthållande av distinktionen mellan sak och person. Majoritetsomröstning verkar däremot vara ett nödvändigt och eventuellt även tillräckligt villkor för demokrati. Transparens och avsaknad av ”ad hominem ” argument är önskvärda egenskaper men varken nödvändiga eller tillräckliga för demokrati.

UP Svar på JA fråga 8: Förr var Gud helig, numera är demokratin helig. Att ifrågasätta demokratin är en hädisk handling, som även om det inte innebär avrättning (det ser demokratin till) så leder den till permanent social uteslutning. Precis som teologer försökte utreda Guds innersta väsen försöker nu statsvetare utröna vad som är demokratins innersta väsen. Att jämföra demokratin med religionen kan ses som ett försök att förlöjliga den och därmed ifrågasätta den, men man kan även vända på begreppen och se religionens jämförelse med demokratin som ett sätt att legitimera religionen. Den må vara ett mänskligt tankefoster men så är uppenbarligen även demokratin. Liksom demokratin försöker transcendera den mänskliga begränsningen genom att bekänna sig till vissa politiska principer så skall även religionen ses som ett försök att höja sig över den mänskliga svagheten. Vi talar om idéer och ideal, som visserligen kan härledas från mänskligt tänkande, men inte desto mindre har ambitionen att gå utöver detta. Men liksom den traditionella gudsbilden är besudlad a vanföreställningar och ren vidskepelse, så utgör den populistiska bilden av demokrati som majoritetsstyre en grav missuppfattning. Jag betonar istället för omröstningar så utgör demokratins kärna transparensen. Frågan om majoritetsomröstning är intrikat, ett visst mått av ’accountability’ måste krävas av politiker, och det är den funktionen som allmänna val fyller. Många ser kontinuerligt majoritetsstyre som i Schweiz som ett demokratiskt ideal, men det är i min mening naivt. Problemet med majoritetsbeslut, som i allmänna val, är att det osökt leder till populism. Politiker tvingas att ta hänsyn inte till argument utan en mer eller mindre chimär folkvilja som kan manipuleras. Politiken reduceras till en marknad där det gäller att anpassa sig efter vad modet föreskriver. Väljarkåren blir till en demon som man både måste vara till lags och som man måste begränsa. Man kan se dessa tendenser i dagens USA.

Det är ganska vanskligt att föra en logisk politisk diskussion ty motsägelserna stirrar en i ansiktet. Huruvida en diktator kan styra helt transparent kan antingen ses som en abstrakt logisk tankelek. (Popper konfronteras med samma dilemma, skall man tolerera intoleransen och hans slutsats är att de skall man inte, och därmed sanktionerar man intoleransen i vissa sammanhang varvid man faktiskt tolererar den. Likheten med Russellparadoxen bör vara uppenbar.) Man kan även hävda att en diktator har en begränsad makt över sina undersåtar, och den makt han har bygger på gemensamma myter; kravet på transparens gör det mycket svårt att skapa sådana gemensamma myter. Sedan är transparensens uppgift att just möjliggöra kritik utan den förtvinar den.

Frågan om demokratin i Sverige påminner om frågan huruvida Sovjetstaten var kommunistisk. Svaret var nej, men att det var på väg mot den ideala kommuniststaten. Jag vidhåller att transparensen är det viktigaste och majoritetsomröstningar är av värde endast om de främjar transparens, och som vi ser är inte alltid detta fallet. Inom vetenskapen råder en hög grad av demokrati tack vare det närmast moraliska kravet på transparens. Vad som är sant och falskt inom vetenskapen är inte en fråga om formella omröstningar, sedan är det en annan sak att i det långa loppet så skapar transparensen en överväldigande konsensus som inte konstrueras fram utan påtvingas genom empiri (Poppers falsifieringsprincip) medan i en politiskt betingad konsensus inte sällan bygger på ränker, röstfiske, kohandel och pragmatiska kompromisser. Som påpekats majoritetsomröstningar kan manipuleras, och jag talar inte om klassiskt valfusk med ogiltiga röster och felräkningar (även om den omtalade gerrymeandering i USA syftar till att begränsa olämpliga grupper att komma till tals) utan om hur den förmenta folkviljan, ett val har till uppgift att formulera, kan manipuleras. Men som sagt allmänna val fyller en viktig funktion men det är långt ifrån klart hur en sådan kan komma till bästa uttryck.

JA Fråga 9: Varför innebär det faktum att Peirce ansåg matematik (och logik) vara normativa att de tillhör moralfilosofin? Finns det inte andra normer än de moraliska?

UP Svar på JA fråga 9: Vi har sannings- och estetiska normer samt moraliska, enligt klassiskt platonskt maner. Sanningsnormen och den moraliska normen är intimt förknippade med uppfattningen att det är omoraliskt att ljuga, d.v.s. man bör uppehålla en transparens när det gäller faktiska omständigheter. Som ovan påpekats den formella logiken blir just genom sin formalitet en leksak och i en lek bestämmer vi själva de moraliska reglerna. Men metalogiken rör efterföljsamheten av de lekfulla moraliska reglerna och kan inte läggas till. Vad vore det för vits med att lägga till regeln att reglerna måste följas! Den logik som ligger till grund för det 'rätta' tänkande har en moralisk dignitet, nämligen att upprätthålla transparensen.

JA Fråga 10: (i) Är inte axiom mer som en "semantik" än en "grammatik" för det matematiska språket? (ii) Finns det något "naturligt språk" vi uppfunnit själva?

UP Svar på JA fråga 10: För det första vad menas med det matematiska språket? Ja det hävdas ibland att matematik inte är något annat än ett språk. Denna missuppfattning kan vi lämna därhän. Däremot kan matematiken givetvis beskrivas med ett språk. precis som vilken annan mänsklig verksamhet eller naturliga fenomen för den delen. Det finns en mängd matematiska begrepp med egna namn och inte minst egna notationer (som integraler etc.), men detta har ingenting speciellt med matematik att göra. För ett par hundra år sedan skrevs den mesta matematiken på latin numera på engelska, det mesta av matematiken beskrivs av ett naturligt mänskligt språk, vilket är knappast förvånande eftersom texten i en matematisk artikel är att betrakta som ett metaspråk. Man talar om matematiska formler som språk vilket dock är missvisande. Formler är inte så mycket till för att uttrycka någonting utan för att manipuleras. Formler kombineras och bildar nya formler. En matematisk text kan till en stor del utgöras av formelmanipulation som utgör en närmast mekanisk väg att finna nya upptäckter inom matematiken (jmfr dess embryo den kartesianska matematiken). En formelmanipulation inleds oftast med en förklarande text och kan inte sällan avbrytas av en sådan. Att manipulera formler är inte samma sak som att uttrycka sig språkligt utan mer som att låta en maskin gå. En schackspelare flyttar sina pjäser, detta kan språkligt kommenteras, men kan knappast anses som ett språkligt uttryck i sig självt, utan som en serie av handlingar, so i sig kan säga mer än ord. Det närmaste man kan komma ett matematiskt språk är faktiskt mängdläran, vars matematiska innehåll är magert.

Jag förstår inte riktigt frågan (i). Vitsen med den formaliserade axiomatiken enligt Hilbert (jmfr ovan) var att begreppen (som punkt, linje etc.) skulle inte ha någon mening (semantik) bara sätten de kombinerade med varandra (grammatik). På samma sätt en pjäs i schack är definierad via de sätt den kan förflyttas på (vilket givetvis har en mening). Visst axiom kan ges mening, men då talar man om modeller. Matematikern som inte är en formell logiker har givetvis en känslomässig relation till de matematiska begreppen som har en definitiv (oftast platonsk) mening. I själva verket det är denna känslomässiga bindning som har uppkommit genom ett otal associationskedjor som gör att matematiker överhuvudtaget kan syssla med matematik. Så även om punkt bara är ett meningslöst ord som kombineras med andra meningslösa ord så kommer alla dessa relationer det kan ingå i med andra meningslösa ord att skapa en mening för just ordet punkt.

(ii) verkar inte vara en matematisk fråga om man skall föra tankarna till esperanto och liknande. Talar man om ett naturligt språk i matematiken kan man nämna mängdläran som faller sig ganska naturlig efter en inledande bekantskap.

JA Fråga 11: Vad anser du om logiker som tillåter härledning av kontradiktioner (t.ex. i dialetheism)? Se t.ex. Priest et al (2018).

UP Svar på JA fråga 11: Jag måste erkänna att jag aldrig tidigare hört talas om dialethism, på mig verkar det som en obskyr sekt som gärna kan vara kvar i obskyriteten. Antingen är det nonsens eller extremt övervärderat. En snabb blick på engelska Wikipedia avslöjar att det inte rör sig om en formell logik utan snarare tvärtom. I dagligt tal stöter vi ständigt på motsägelser och de som tar dessa på allvar betraktas som lätt autistiska. Mängden av alla mängder är ett intuitivt begrepp som inte leder till någon konflikt ty det vardagliga språket är alltför lätt. Ja naturliga språk tjänstgör som sina egna metaspråk, man kan tala om ett språk genom att använda samma språk, och det är ett välkänt faktum att man kan säga mycket nonsens med språk utan att det (nödvändigtvis) leder till världens undergång. Jag brukade hävda i min ungdom att ett djupsinnigt uttalande karaktäriseras av att dess motsats är lika sann. 'Livet är underbart' uttrycker en djup sanning, likaså 'Livet är ett helvete' utan att för den skull beteckna helvetet som underbart. Man kan i min mening inte tala om dialethesisk logik utan det är att ses som ett erkännande av språkets ologiska struktur och därmed en hyllning till det ologiska, vilket inte är samma sak som en hyllning till dumheten eller oförnuftet (i sann dialethisk anda!). Det sociala umgänget bygger inte på att kommunicera sanningar, utan tvärtom, att vilseleda och manipulera. En språklig utsaga i ett socialt sammanhang har inget sanningsvärde, det intressanta är inte vad det bokstavligen säger, utan vilka sociala konsekvenser det har, inte minst språkliga.

JA Fråga 12: Sid 7 (fotnot 10) I Pompeji finns bevarade platta målningar.

UP Svar på JA fråga 12: 7. Jo jag har ett minne av dessa. Visserligen senare än klassisk grekisk tid men ändå av uppenbart intresse. Jag har aldrig studerat dem närmare. Målningar har i allmänhet inte överlevt tidens tand så vi har föga aning om dem. Perspektivet må ha varit mycket känt bland grekerna, den matematiska principen är så enkel och innehållet i Euklides (som för övrigt skrev en bok om optik i samma anda).

JA Fråga 13: Kan det verkligen tyckas banalt att uppfinna nya notationer i matematik? Är de inte snarare essentiella? Skulle matematiskt tänkande, annat än på basnivå, vara möjligt utan extern skriftlig notation?

UP Svar på JA fråga 13: Notions not notations lär Gauss ha sagt i engelsk översättning (Gauss var liksom Goethe en stor beundrare av Scott och kunde säkert engelska, liksom Goethe) är nyckeln till genombrott. Det ligger mycket i det. Dock Descartes införde modernare notationer, gamla notationer i algebra påminner mycket om modern texkod. Man kan hitta skräckexempel på gammal förlegad notation. $e^{\pi t} = \cos t + i \sin t$ är urtypen för en vacker formel (Eulers formel) men hur skulle den se ut med annan notation? eul K)papo ·q· Ima ·q· u (!!Cz inc)u(¿¿Ima·q·Sz inc)u(, knappast vacker. Formler bygger mycket på det visuella och ger en snabb överblick. Leibniz notation anses överlägsen Newtons med dy/dx och integraltecken. Engelska matematiker höll fast vid Newtons klumpigare terminologi medan kontinentala matematiker anammade Leibniz och tog över kalkylen. Dock skall man inte dra för stora växlar på detta. Notation är oftast en fråga om evolution, det som passar bäst överlever.

JA Fråga 14: Har du definitioner av ”förståelse” och ”förklaring”? Förklara hur du gett illustrationer av båda begreppen.

UP Svar på JA fråga 14: Humanister gör en stor poäng av att de förstår medan naturvetare bara förklarar. Man skulle kunna hävda att förklara är en formell förståelse och en förklaring kommer utifrån och kan kommuniceras. Oftast har det samband med en verifiering. Jag skall förklara varför något är sant. Medan förståelsen kommer inifrån och kan inte förmedlas ty den kan inte kläs i ord, endast i bästa fall ’evokeras.

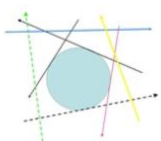
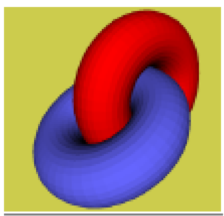
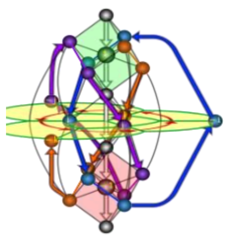
Leif Bloch Rasmussen

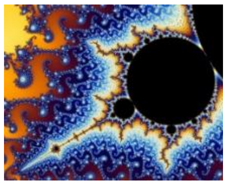
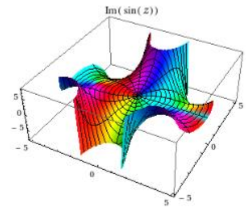
A. Kommentarer och frågor till Ulf Persson

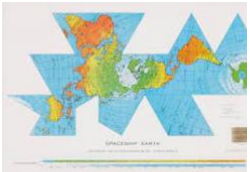
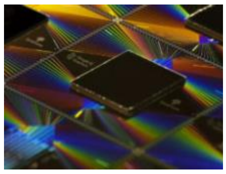
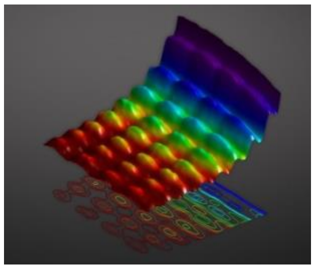
Person advarer mod metaforisk brug af matematik, geometri, men jeg vover alligevel at kommentere ud fra dette. Som den danske digter Per Højholt skrev engang: Kun en tåbe frygter ikke metaforen. Men omvendt så siger en af mine danske favoritter udi filosofi - Knud Ejler Løgstrup - at metaforen evner at inspirere, hvor det nøgterne kan låse sproget. tanken, sansningen fast.

Jeg har derfor valgt at kommentere Person’s artikel om matematik med udgangspunkt i en artikel af Anthony Judge: Metaphorical Geometry in Quest of Globality - in response to global governance challenges, Laetus in Praesens, draft March 18, 2009

Han skelner mellem fire geometrisk dimensionerm og dermed fire forskellige måder at anvende matematik i den ’virkelige’ verden tolket som rum. Jeg har udvidet dette med en Dimension 5, der søger at virke med komplekse tal, jf. Hamilton:

Dimension 1	**Dimension 2**	**Dimension 3**	**Dimension 4**	**Dimension 5**
punkt og linjer	areal og cirkel	globe og polyeder	torus, kvante, fraktal	komplekse tal, rum, kvaterrnion
				

Mine spørgsmål er da:

1. er matematikkens sprog med formler og axiomer i samme kategori i dimension 1 og 2 som i dimension 3 til 5.
2. kan geometrien og matematikken være basis for metoder for tvær- og transdisciplinaritet
3. kan polyedrene fungere som overgang fra 2-D metoder til 3-D metoder og komplekse, imaginære rum

B. Ulf Persson (UP) svar och svarskommentarer till Leif Bloch Rasmussen (LBR)

Jag har mycket svårt att inse innebörden i dessa frågor. Jag kan visserligen svara ja på alla tre, men detta leder knappast någonstans. Men jag har heller ingen aning om vad dessa frågor avser att leda till. Jag må tillägga att referensen till Anthonyn Judge är för mig som matematiker helt obegriplig. Vad har fraktaler med specifikt dimension fyra att göra? Och än värre vad menas egentligen med dimension om man härför komplexa tal (2D) och kvaternioner (4D) till detta? Och var skall oktioner (Cayley tal - 8D) placeras? I dimension 6?

Jag skall även påpeka att den presentation av matematiken jag bidrog med är som ett sandkorn i hela matematiken, även om man 'ifolge' William Blake kan se en hel värld i ett litet sandkorn (vilket även var något av min pedagogiska ambition). Jag nämner inte komplexa tal i min presentation, men givetvis istället för att betraka n-tupler av reella tal $\mathbf{R}^n$ kan man betrakta n-tupler av komplexa tal $\mathbf{C}^n$ vilket jag har gjort under större delen av mitt liv. Men då blir det svårt att visuaiisera och det fanns ingen anledning att införa detta på den mycket elementära nivå jag höll min diskussion.

2-D polygoner rejser mange spørgsmål for mig, da to-dimensionaliteten i sig selv måske udelukker metoder til at forstå og virke med virkeligheden, specielt 3-D polyedre og glober.

Detta påstående är totalt obegripligt för mig. Med *udelukker* antar jag är menat det svenska ordet *utesluter* (excludes). På vilket sätt skulle det göra det?

För att återgå till frågorna.

LBR fråga 1: Er matematikkens sprog med formler og axiomer i samme kategori i dimension 1 og 2 som i dimension 3 til 5.

UP Svar på LBR fråga 1: Matematiken är densamma, samma logiska tänkande, och när det gäller axiom så är det inte så att man i en presentation av matematiken presenterar en lista på axiom dessa är underförstådda i sammanhanget. Det finns bara en matematik, allt annat är trams.

LBR fråga 2: Kan geometrien og matematikken være basis for metoder for tvær- og transdisciplinaritet?

UP Svar på LBR fråga 2: Matematiken är tillämpbar på den så kallade verkliga världen (det är väl det som menas med trans?). Den är även i högsta grad tillämpar på sig själv (vilket menas väl med tvaer?), vilket besvarar en av aspekterna av fråga 1.

LBR fråga 3: kan polyedrene fungere som overgang fra 2-D metoder til 3-D metoder og komplekse, imaginære rum

UP Svar på LBR fråga 3: Frågan är inte ens grammatiskt formulerad vilket inte gör den enklare att tolka. Polyhedrar är objekt i den 3-dimensionella världen som är uppbyggda av två-dimensionella objekt (polygoner) men på ett sätt som endast har mening i 3-dimensioner. Men för att definiera polyhedrar i godtyckliga dimensioner behöver man inte ta ett dimensionssteg i taget utan dessa kan konstrueras direkt genom att ta det konvexa höljet av ett ändligt antal punkter. Men visst man tänker sig de platonska kropparna säg som bilade av regelbundna polygoner (trianglar, kvadrater, eller pentagoner). Sedan kan man ta dessa fem i sin tur och bygga upp 4-dimensionella motsvarigheter, men då kan man inte längre stödja sig på sin visuella intuition, men då kommer formella konstruktioner till hjälp. Dessa är exempel på reella polyhedra (polytoper) men detta kan göras även över de komplexa talen. En utmärkt referens är Coxeter, som jag tror jag listade i min bibliografi. Men jag påpekar än en gång att detta är bara ett litet hörn av matematiken.

Ordsammansättningen komplexa, imaginära rum verkar vara tårta på tårta. Man behöver inte polyhedra för att definiera komplexa rum, men givetvis hindrar det ingen att introducera dem i sådana.

Per Flensburg

A. Kommentarer och frågor till Ulf Persson

Ulf, din artikel förvånar mig! Helt enkelt för att jag begriper så pass mycket av din matematik som jag gör. Jag har visserligen nästan tre betyg i matematik, men trodde jag hade glömt den mesta matten under de 53 åren som gått sedan jag läste det. Jag har skrivit in en massa kommentarer i din artikel och inser att jag på något vis måste extrahera dem i löpande text. Det kommer här.

På sätt och vis handlar både din och min artikel om att beskriva verkligheten, fast vi närmar oss från helt olika håll. Du utgår från logiken och ett antal axiom och jag utgår från en mänsklig samvaro. Det är därför extra intressant att du kommer fram till att axiomen ytterst är sociala och jag kommer fram till att i en väl sammanhållen församling kan betrakta verkligheten som i princip objektiv och logisk. Ditt sätt koppla logik, matematik och axiom samman med en social verklighet har jag inte sett tidigare. Kanske det säger mer om hur lite jag är beläst. Ännu mer spännande blir det då du hävdar att den logiska grunden för matematiken är moralfilosofiskt. Det resonemanget hade jag gärna sett att du utvidgade.

I mitt ämne, informatik, formaliserar man en arbetsbeskrivning och reducerar därmed arbetet till det som är formaliserbart. Men allt arbete innehåller icke-formaliserbara komponenter så därför misslyckas stort sett alla systemimplementeringar! Så du har alldeles rätt då du säger att de är monstruöst irrelevanta!

Du skriver: ”Om matematiken kunde reduceras till logiken, skulle detta faktum också reduceras till logiken…” Jag hänger inte med här. Om man reducerar matematiken till logiken så gör man väl det utanför både logiken och matematiken? Det är ju logiskt kan man tänka och så föll fällan igen! Lysande!

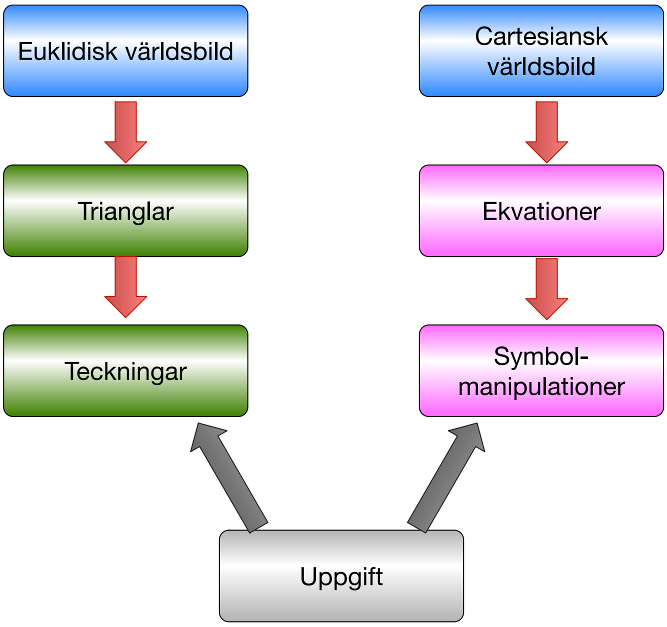
Du har sedan ett avsnitt om geometri, som jag bitvis tycker går utanför bokens tema. Projektioner och sfärisk geometri är visserligen intressanta, men vad har de med vetenskapliga metoder att göra? Att matematiken är en metodvetenskap som tillhandahåller analysmetoder åt andra vetenskaper är en helt annan sak. Men i din slutkläm där du menar att matematiken har ett innehåll inte bara är ett formellt spel instämmer jag inte. En del av verkligheten kan beskrivas på ett matematiskt vis, men det innebär inte att matematiken i sig har innehåll, bara att en del av verkligheten är matematisk. Det innebär att matematiken i denna del kan vara användbar.

Du hävdar också att många studenter tror att matematiken är något som uppfunnits av sadistiska lärare. Jag tror det! Sättet på vilket matematik lärs ut (genom nästintill oändligt tragglande) är ett ytterst effektivt sätt att döda allt intresse för matematik!

Din jämförelse mellan Euklides geometri och Descartes analytiska är ett alldeles utmärkt exempel på antologins kärna: Att jämföra olika vetenskapliga metoder

Men dock, har jag problem att placera metoderna på korrekt nivå. Så här tänker jag: Utgångspunkten är en uppgift. Det är inget problem i form av något i verkligheten som behöver belysas eller korrigeras, det är en uppgift i en större uppgift som i regel gäller att underlätta konstruktionen av något, som kan tolkas mycket brett. Kort sagt: Man skapar ett hjälpmedel för att ingå i något annan uppgift.

Om vi nu ser på figuren ovan till vänster har vi två vägar att gå: Den Euklidiska och den Cartesianska. I den ena bygger man på teckningar där utgångspunkten är trianglar och likformighet, i den andra nyttjar man symbolmanipulationer kommande från ekvationer som på ett algebraiskt vis beskriver uppgiften.



Nu är frågan: Är dessa olika vetenskapliga metoder? Exempel på vetenskapliga metoder från mitt område är: Fallstudier, enkäter, aktionsforskning, artefaktkonstruktion, artefaktevaluering, diskursanalys, intervjuteknik etc. Det gemensamma för dem är att används även i andra vetenskaper. Men det två metoder du beskriver är såvitt jag förstår genuint matematiska. De kan tillämpas på många uppgifter, men ingen annan vetenskap skulle se dem som primära metoder för att undersöka de problem man sysslar med. Som beskrivning av matematiska undersökningsmetoder är det en glimrande beskrivning, men som generell vetenskaplig metod är jag mera tveksam. Det leder fram till en diskussion av vad en vetenskaplig metod egentligen är.

Det längre exemplet som följer tycker jag du ska ta bort. Efter 17 sidor gav jag upp att försöka förstå vad du sysslade med. Så det har jag hoppat över!

I nästa avsnitt, om det matematiska landskapet, kommer du inte på väldigt intressanta frågor: Kopplingen mellan verklighet och matematik och förlängning all vetenskap. Om vi nu tänker på en matematiker som sysslar med tillämpad matematik, så associerar vederbörande vissa fysiska fenomen med vissa symboler. Dessutom införs ett axiomsystem i form av föregående forskning som definierar vissa samband mellan dessa fenomen. Vår matematiker överför dessa förhållanden till ekvationer eller möjligen olikheter. Genom att manipulera symbolerna, som representerar verkligheten, kan då den tillämpade matematikern framställa och bevisa teorem som är giltiga under förhållanden att de grundläggande axiomen är korrekta. Men för att teoremet ska säga något om verkligheten krävs ytterligare en sak, nämligen att verkligheten följer logiska lagar! Det är ett antagande jag ställer mig skeptisk till. Men en del av verkligheten kan vara logisk och det är fascinerande hur man med matematiken kan beskriva obegripliga fenomen. Jag har läst att det inom fysiken finns något som kallas Bells bootstrap hypotes, som säger att världen beskrivs utifrån ett antal differentialekvationer och genom att välja lämpliga sådana kan världen se ut hur som helst. Det är enligt denna hypotes fullt möjligt att månen är en grön ost om man väljer lämpliga ekvationer som utgångspunkt.

När det sedan gäller AI är den fruktansvärt överskattad. Och väldigt få verkar inse det. Eller så är jag dum. Jag resonerar så här: Det mesta inom AI bygger på neurala nätverk. Ett neuralt nätverk består av ett antal noder och kopplingar mellan dem. Se figuren till vänster., Det finns två typer av nätverk: Tränade och otränade.

Tränade nätverk tränas upp genom att de matas med kända mätdata och kända svar. Om resultatet skiljer sig från det kända svaret beräknas hur stort felet är och vikterna på ingångarna i varje neuron justeras. Detta förfarande itereras och om nätet är rätt designat (där faktorer såsom val av nätverk, antal neuroner, val av träningsdata spelar en avgörande roll) så konvergerar nätet i riktning mot att ge de önskade svaren. Men: **Detta fungerar bara då det finns entydiga ja/nej svar**. Exempel på sådana neurala nätverk är avstavning och OCR.

Icke tränade nätverk är självlärande system som används till att hitta kända och okända relationer mellan data. Nätverket matas med data men presenteras inget facit. Vikterna justeras exempelvis beroende på om användarna gillar eller inte gillar resultatet, alternativt baserat på om den process som nätverket styr ger ett resultat nära ett börvärde (om tillämpningen är reglerteknik), eller om en optimeringsfunktion ger maximalt eller minimalt resultat (om tillämpningen är ett optimeringsproblem). Träningen avbryts när viktförändringarna för en iteration konvergerat tillräckligt nära noll. Även här baseras processen på entydiga ja/nej svar som i detta fall ges utifrån.

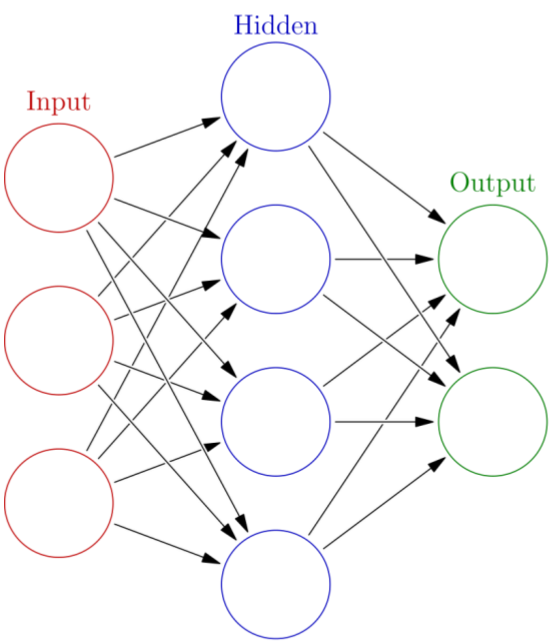
AI baseras i själva verket på ytterst primitiva beräkningar och antagande och framför allt på logik. Mänskliga bedömningar, som spelar stor roll i all offentlig förvaltning kan inte användas för att konstruera AI-stöd. Däremot finns det system som hjälper t.ex. en läkare att ställa diagnos genom att ställa ett antal frågor på olika typer av symptom. Det leder logiskt fram till att patienten har en viss sjukdom, men det finns massor av exempel på att det ändå blir fel. Och det är väl här som slutsats blir uppenbar: Sanningsvärdet för isolerade matematiska fakta är poänglöst, det är hur allt hänger ihop som är intressant.

Några frågor:

Fråga 1. Anser du att verkligheten är logisk? Om så är fallet varför? Om inte, ja varför?

Fråga 2. Om jag minns rätt visar Russell och Whitehead i sin bok: Principia matematica att all matematik baseras på satslogik. Du hävdar motsatsen. Hur hänger detta ihop?

Fråga 3. Vad är dina kommentarer till Bells bootstrap hypotes?



Fråga 4. Gauss lär någon gång ha sagt ungefär att matematiker inte vet vad de gör eftersom matematiken endast sysslar med symbolmanipulering. Du tycks vara av motsatt mening,

Fråga 5. Finns det några generella vetenskapliga metoder inom matematiken?

B. Ulf Persson (UP) svar och svarskommentarer till Per Flensburg (PF)

PF Fråga 1: Anser du att verkligheten är logisk? Om så är fallet varför? Om inte, ja varför?

UP Svar på PF fråga 1: Talar vi om den fysiska verkligheten eller den sociala? När det gäller den senare kan vi verkligen betvivla det. Ett intressant fenomen är de mänskliga språken som visserligen tycks ha en viss underliggande logik, det är så vi 'fattar galoppen' och lär oss språk förvånansvärt lätt, men med en mängd av undantag (som kanske lyder en förborgad logik?). I mänsklig kommunikation är det inte sanningsvärdet som är av intresse, ett vittnesmål kan inte tas ad notam utan måste tolkas, som filosofihistorikern Collingwood påpekar. Det är inte vad som sägs som det är det intressanta utan vad som menas med det. Mänsklig kommunikation går till en stor del ut på att manipulera och vilseleda, därav lögnens centrala betydelse. I humanistisk vetenskap, speciellt historia, är det kännedomen om den 'mänskliga naturen' som ger en mening till det virrvarr av specifika händelser som utgör det förgångna. Vad den mänskliga historien handlar om, i motsats till naturhistorien, är enskilda beslut tagna av så kallade historiska aktörer. Dessa beslut måste förstås och det gör man genom att sätta sig in hur dessa aktörer må ha tänkt. Det är detta som är innebörden i begreppet 'levandegöra historien'. Collingwood talar om att historia är att rekonstruera det förgångna i det närvarande (och historikern John Lukacs talar även i liknande termer) med hjälp av de spår det förgångna har lämnat i nuet. Men för att tolka dessa spår, ja för att överhuvudtaget kunna identifiera de relevanta spåren, måste man ha någon underliggande princip, och denna ges av det mänskliga sociala tänkandet.

I naturvetenskapen däremot finns ingen 'designer' ingen mänsklig natur som ger mening, vad man tvingas förlita sig på är vissa enkla, kalla dem gärna logiska principer. Enkelhet och därtill hörande skönhet är de vägledande principerna för naturvetarens försök att söka den mening, förutan vilken ingenting vore förståeligt. Det är här matematiken kommer in, den som i en trivial mening är skapad av människor, men som ändå tycks ha en oberoende existens, ofta, smått föraktfullt, benämnd platonsk.

Att människan har förmågan att 'förstå' naturen uppfattas av många som oförklarligt och mirakulöst. Speciellt under metafysikens gyllene århundrade (1800-talet) uttryckte många filosofer och vetenskapsmän (gränsen var vid denna tid flytande) sin förundran över detta faktum. Man kan även se den formulerad av C.S.Peirce en anti-metafysiker. I modern tid har Wiegners förundran över matematikens orimliga effektivitet till leda citerats. Principen om det naturliga urvalet är ett lysande exempel på hur en enkel filosofisk princip kan genomsyra en hel vetenskap, i detta fall biologin, och som ofta har påpekats, ingenting i biologin kan 'förstås' utom i ljuset av just denna princip. När jag först kom i kontakt med den (vi talar inte om evolutionen per se, den var redan presenterad av Lamarck på 1700-talet, utan den underliggande mekanismen som inte bara gör den trolig utan rentav oundviklig) förundrades jag över att en sådan enkel och kraftfull idé kunde återfinnas utanför matematiken. Darwin var ingen matematiker (även om han var matematiker nog att som skolpojke fascineras av den euklidiska geometrin) och beklagade ofta sin avsaknad av matematisk begåvning, men den darwinistiska principen är trots detta 'matematisk' till sin natur.

PF Fråga 2: Om jag minns rätt visar Russell och Whitehead i sin bok: Principia Matematica att all matematik baseras på satslogik. Du hävdar motsatsen. Hur hänger detta ihop?

UP Svar på PF fråga 2: Russell och Whitehead visade inte att all matematik kan baseras på satslogik, däremot antog de att matematiken kunde på så sätt baseras och företog sig uppgiften att så en gång för alla att göra med alla detaljer. (Man skall komma ihåg att ur Russells synpunkt var matematiken inget annat än en räcka tautologier, en uppfattning som även Wittgenstein anammade) Detta var en grannlaga uppgift som knäckte de bägge intellektuellt och mentalt. Russell skriver om att verklig mental koncentration är ytterligt plågsamt och kan kanske bara uthärdas under någon minut. De stora andarna är de som lyckas med konststycket under två minuter (jag friserar en aning för dramatisk effekt). Innan var Russell en seriös hårt arbetande filosof med ett gediget rykte, efteråt är man mest känd som pop-filosof med en bred läsekrets. Whitehead var äldre och bleknade bort. Några år senare drev Gödel logiken till sin spets, och nämnde just Principia Matematica i sin titel, och visade ofullständigheten i att kunna reducera matematiken till logik, och därmed slog undan fötterna på matematikern Hilberts ambition att med matematiken kunna bevisa matematikens konsistens. Den grundläggande idén i Gödel går tillbaka till de gamla grekerna och de paradoxer som uppstår i logiken i och med självreferensen. (Russell med sin överskattade paradox, var inte främmande för detta, men kunde bara koncentrera sig en minut i taget).

Varken Russell eller Wittgenstein förstod Gödels bevis. Denne försynte man undrade om de var så korkade, eller bara låtsades så vara. Principia Matematica är en ståtlig katedral dock utan innehåll och står nu övergiven ute på heden endast sporadiskt besökt av vilsegångna turister.

PF Fråga 3: Vad är dina kommentarer till Bells bootstrap hypotes?

UP Svar på PF fråga 3: Jag känner inte till Bells bootstrap hypotes, men jag antar att du menar den nordirländske fysikern John Stewart Bell (1928-90) som är känd för sina intressanta försök till klargörande av vissa kvantfysikaliska paradoxer. Att liknande fenomen som att rationellt kunna förklara och underbygga godtyckliga politiska ideologier är något som flitigt förekommer i den sociala världen är knappast en överraskning för gemene man, men i naturvetenskapen? Kvantfysikens underbyggnad är visserligen matematiskt sofistikerad men inte begreppsmässigt förstådd. Att harmonisera den allmänna relativitetsteorin med kvantfysiken, de två stora genombrotten i fysiken under 1900-talet, utgör fortfarande en stor utmaning. Vad denna bootstrap hypotes illustrerar är fåfängligheten att försöka axiomatiskt grundfästa fysiken. Newton försökte så göra i sin Principia, men fysiker har ignorerat detta, även om Newton hade en mycket enklare uppgift (och Arkimedes var en föregångare). Försök att lägga kvantfysiken på en axiomatisk grund har inte visat sig vara fruktbart. Jag kan mycket väl tänka mig att Bell med sin hypotes medvetet försökte förlöjliga sådana försök, som jag redan försiktigt antytt. Fysiker handskas med matematiken på ett för matematiker ofta hårresande sätt, men de lyckas i allmänhet, vilket får matematiker att avundsjukt undra om dessa besitter en för matematiker otillgänglig intuition. Den matematiska logikens revolutioner under tidigt 1900-tal har en hel del gemensamt i sinnelag med den kvantfysiska revolutionen under samma tid, vilket ovanstående diskussion indikerar. Den ryska matematikern Yuri Manin har uttryckt det så, att den matematisk-logiska revolutionen var introvert till sin natur och sysslade med det mänskliga tänkandet, medan den kvantfysiska var extrovert och var riktad mot verkligheten. Av de två gav den senare den mest hisnande berg-och-dalbane-upplevelsen.

PF Fråga 4: Gauss lär någon gång ha sagt ungefär att matematiker inte vet vad de gör eftersom matematiken endast sysslar med symbolmanipulering. Du tycks vara av motsatt mening,

UP Svar på PF fråga 4: Vad är källan till detta minst sagt absurda påstående? Jag har aldrig träffat på det tidigare och det går stick i stäv med vad vi vet om Gauss och vad vi kan lära oss av hans matematiska gärning, inte bara hans resultat utan även hans sätt att resonera. Gauss anses av många som den mest framstående matematikern i modern tid, vilket betyder någonsin. Symbolmanipulering indikerar ett mekaniskt synsätt på det matematiska hantverket som vore främmande för en sådan ande. Gauss lär ha yttrat en gång angående ett matematiskt genombrott att ett sådant inte berodde på 'notation' utan 'notion' d.v.s. matematiska idéer. Vad som kan vara ursprunget till ett sådant yttrande är att Gauss utförde under sitt liv många rutinberäkningar, speciellt i hans arbeten om himmelsmekanik. Det var Gauss som lyckades beräkna den nyupptäckta planeten Ceres bana ur de knapphändiga observationer som hade gjorts i början av året 1801 (den upptäcktes på det 19-århundratets första dag) innan den tappades bort. Efter denna bedrift (som blev Gauss vida känd, och den grundlade hans professionella intresse för astronomin. Han ödslade dock en stor del av sin dyrbara tid med just beräkningar, och i hans dagböcker kan man finna formuleringar om att döden vore honom kärare än ett liv som detta. Senare skulle han även ödsla sin tid med rutinartade uppgifter inom lantmäteri (praktisk geodesi) även om han revolutionerade även detta gebiet och det gav upphov till banbrytande insikter om ytors inneboende geometri (gaussisk krökning etc). Till en viss del fann Gauss ett nöje i beräkningar och vad som intresserade honom var genvägar och nya sätt att utföra det rent mekaniska. Euler, en annan av den moderna matematikens giganter, sysslade även han med numeriska beräkningar men utan ägna det det sidointresse som Gauss briljerade med. Vilket föranledde Gauss till den sarkastiska kommentaren: inte undra på att han blev blind (vilket skall tolkas bokstavligt). För Gauss var inte matematiken ett formellt spel utan han kombinerade den med en enastående geometrisk och fysikalisk intuition (och hans mest betydande fysikaliska arbeten var inom magnetismen tillsammans med fysikern Weber)

PF Fråga 5: Finns det några generella vetenskapliga metoder inom matematiken?

UP Svar på PF fråga 5: Vad menas egentligen med en generell vetenskaplig metod? Vetenskapliga metoder är domänspecifika, och att tala om sådana i en vidare mening är knappast fruktbart utom rent filosofiskt. Vi har t.ex. Poppers falsifiering som i sin generalitet blir närmast tautologisk men får ett innehåll först när den kontrasteras mot Francis Bacons princip om den förutsättningslösa observationen (något som föresvävar de flesta människor (och politikers) naiva uppfattning om vetenskaplighet) [1]. William James i sin klassiska 'Principles of Psychology' talar om hemligheten att lösa att problem består i att skala bort all onödig information (en variant av abstraktionsprincipen) vilket är en elegant formulering, men knappast av någon större hjälp i en konkret situation. Som tonåring formulerade jag en allmän metod i matematiken, nämligen att uttrycka en sak på två olika sätt och dra slutsatser ur likheten. Detta reflekterade givetvis min något omogna attityd till matematiken som formel-

[1] S.O.Hansson, liksom många filosofer och vetenskapsmän, tar falsifiering bokstavligen som en konkret vetenskaplig metod och visade i en artikel i Foundations of Science att vetenskapsmän i allmänhet inte nyttjar denna genom att ta upp en varierad skara av vetenskapliga artiklar för granskning (liknande kritik anfördes av Martin Gardner [privat brevväxling]). Jag bemötte detta senare i en artikel i samma tidskrift i vilken jag försökte påpeka att detta var en missuppfattning och att falsifieringsprincipen skulle istället ses som en meta-metod. Syftet med denna formulerade princip var inte att ge en metod att bedriva vetenskap utan ge ett kriterium med vilket man kunde avskilja pseudo-vetenskap från verklig.

manipulering ur vilken resultat mirakulöst hoppade ur som kaniner ur en hatt, dock måste jag tillstå att observationen inte var helt grundlös och att det utnyttjas dagligen, även, om jag mins rätt, i mitt kapitel om matematiska metoder

Popper ansåg att matematiken inte var en vetenskap ty den hade genom sin deduktiva underbyggnad en soliditet som vetenskapen inte besatt. Matematikens sanningar är som sagt vad eviga och inte provisoriska. Må vara sant, men matematiken bedrivs av människor och bevis kan vara felaktiga, vilket först senare ådagalägges. Om man något förenklat ser på matematiken som ett axiomsystem vars konsekvenser skall utforskas kan man se varje bevis som ett falsifieringsförsök för hypotesen att detta system är motsägelsefritt. Motsägelsefrihet är endast något vi tillsvidare kan antaga.

Falsifieringstänkandet är en naturlig reaktion som förelåg långt innan Popper. Vi finner det som övligt redan hos de gamla grekerna. Det indirekta beviset, d.v.s. att man förutsätter något som skall visa sig falskt, utgör om något en falsifiering av det förutsatta. En matematiker som upptäcker något förbluffande undrar givetvis om detta kan vara sant. Vad denne gör är inte att återigen syna sin argumentation i sömmarna utan att härleda konsekvenser av upptäckten. Kan denna upptäckt verkligen stämma? Dessa konsekvenser kan vara av olika art, ibland rent numeriska. Om motsägelser uppkommer vet man att argumentationen var felaktig utan att ens veta vari i detta består (detta förutsatt att matematiken är konsistent, vilket i praktiken är en trosföreställning, tills den visar sig ohållbar). Om däremot konsekvenserna passar väl in i sammanhanget eller t.o.m. ger bekräftande förklaringar, utgör detta en mycket stark indikation på att det stämmer, betydligt starkare än att syna argumentationen i sömmarna, ty man kan ha gjort ett försåtligt misstag för vilket man är helt blind, och endast genom en oberoende kontroll kan man bli varse det [2]. Även i vardagslivet förekommer samma tänkande och kontrollerande.

Jag befarar att mycket närmare kan man inte komma en gemensam vetenskaplig metod, eller skall man snarare säga attityd. Utan den principiella möjligheten att kunna göra en falsifiering kan man inte bedriva vetenskap, utan en möjlighet till falsifiering skulle allt i princip kunna vara sant och vetenskapen utmärks just genom sin diskriminering, ofta är det negativa resultatet, d.v.s. att något inte kan vara sant, det som är av intresse. Genom att kunna såga av potentiella grenar av det möjliga, kan man koncentrera det möjliga och därmed kunna penetrera djupare in i det okända, som den ofta citerade vetenskapsfilosofen Thomas Kuhn har observerat.

Anders Gustavsson

A. Kommentarer och frågor till Ulf Persson

När jag valde bort matematik som fördjupningsämne, som lärare uppmanade mig att fortsätta med, berodde det på att jag upplevde ämnet dött och utan relation till människor.

[2] Ett trivalt exempel utgör en beräkning av en numerisk summa av ett antal termer för hand. Har man gjort rätt? Det är lönlöst att göra om samma beräkning om och om igen, man kommer bara att gå i samma spår; då är det bättre att summera termerna i en helt annan ordning. Om man då får samma svar kan man vara betydligt säkrare på sin sak. Detta är ett vardagsexempel på ett falsifieringstänkande.

1) Min första fråga blir: Har matematikämnet något med människor att göra, som är fokus inom mitt ämnesområde humaniora, eller rör det sig enbart om torra siffror och streck som relateras till varandra?

2) Är matematikern den objektive forskaren, som tidigare var målet inom humaniora, eller finns det något subjektivt drag inom dennes vetenskapliga verksamhet?

3) Hur är det egentligen med axiomen? Hur har de uppstått och är de antaganden i stället för evigt gällande orubbliga sanningar?

4) Är vetenskaplig sanning det primära målet inom matematiken? Har frågan om sannolikhet någon plats? Hur kan verifiering/bevisföring ifrågasättas?

5) Vad kan matematisk metod ha att lära till andra vetenskapliga discipliner inom andra fakultetsområden?

B. Ulf Persson (UP) svar och svarskommentarer till Anders Gustavsson (AG)

AG Fråga 1: Min första fråga blir: Har matematikämnet något med människor att göra, som är fokus inom mitt ämnesområde humaniora, eller rör det sig enbart om torra siffror och streck som relateras till varandra?

UP Svar på AG fråga 1: Har konst något med människor att göra, eller rör det sig enbart om våta färgpigment? Har poesi något med människor att göra eller rör det sig enbart om svarta bokstäver och mellanrum?

Matematik bedrivs av människor och har således en hel del att göra med människor. Vissa hävdar att matematik är en helt mänsklig konstruktion jag håller inte med utan bekänner mig till matematisk platonism. En bild jag skulle vilja framhålla är konstnären som målar av ett landskap. Landskapet finns utanför konstnären och är helt fristående från denne, men målningen funnes inte utan landskapet. Målningen är en tolkning av landskapet, en mänsklig konstruktion, och är således inte oberoende av detta som istället inför restriktioner på hur målningen kan se ut. Konstnärens utmaning är att med fantasins hjälp bemästra de restriktioner under vilken han verkar.

Platon kan ses som matematikernas skyddshelgon utan att vara matematiker själv. Matematiken utgjorde för Platon ett ideal och har alltsedan dess utgjort en omistlig del av den seriösa västerländska filosofin.

AG Fråga 2: Är matematikern den objektive forskaren, som tidigare var målet inom humaniora, eller finns det något subjektivt drag inom dennes vetenskapliga verksamhet?

UP Svar på AG fråga 2: Objektiviteten är ett ideal och ingen mänsklig verksamhet kommer närmare detta ideal än matematiken. Men det subjektiva inslaget i matematiken är ofrånkomligt ty att bedriva matematik är en mänsklig verksamhet. Vad är fult och vad är viktigt och intressant inom matematiken kan givetvis inte behandlas matematiskt. Man kan inte ge ett matematiskt bevis för att ett visst bevis är vackert eller att ett begrepp är intressant. Matematikern drivs av en passion, inte bara för att finna det sanna utan även det vackra och det förklarande, men det är viktigt att vad han finner är sant och därmed besitter en objektiv existens. Det finns ingen universell metod att lösa matematiska problem utan matematikern är hänvisad till sin erfarenhet, sin fantasi och sin intuition, vilka alla är av subjektiv natur. Matematikerns yttersta ambition är att förstå och förståelse är om något ett subjektivt fenomen.

AG Fråga 3: Hur är det egentligen med axiomen? Hur har de uppstått och är de antaganden i stället för evigt gällande orubbliga sanningar?

UP Svar på AG fråga 3: Ursprungligen var de menade som evigt gällande sanningar, sedan sågs de som i princip godtyckliga antaganden. Det kan synas vara en himmelsvid skillnad mellan dessa två synsätt, men för att förstå det på rätt sätt måste vi vara klara med att grekerna gjorde en åtskillnad mellan axiom och postulat. Axiomen hade att göra med korrekta sätt att logiskt argumentera, medan postulaten hade med studieobjekten att göra. Som axiom kan vi ta som exempel ’om lika läggas till lika förblir de lika', som postulat kan vi anföra ’genom två distinkta punkter går det en och endast en linje’. Axiomen har således med vårt eget resonerande att göra, medan postulaten har att göra med egenskaper hos det vi studerar. Grekerna ansåg att de geometriska postulaten var så fundamentala ate inte kunde betvivlas, de ansågs vara eviga sanningar. Vi kan säga att de gamla grekerna intog en fundamentalistisk moralisk hållning. Ett av postulaten, som i modern formulering lyder ’genom en punkt utanför en given linje kan en och endast en linje parallell med den givna dragas’. Visserligen betvivlades detta inte, men det ansågs inte vara så uppenbart enkelt och otvivelaktigt sant att det kunde tjäna som ett postulat utan ansågs vara en sats som följde av de andra postulaten genom ett korrekt resonerande. Ett sätt att försöka bevisa det vore att antaga motsatsen d.v.s. att antaga att det var falskt, detta kunde göras på två sätt, antingen att antaga att ingen parallell linje fanns (för någon punkt) eller att det fanns mer än en. På detta sätt kunde man visa att den uppkomna geometrin helt enkelt var bisarr. Men att vara bisarr är inte samma sak som att vara felaktig. Detta insågs oberoende av varandra av Gauss, Bolyay och Lobachevsky i början av 1800-talet, och man utvecklade två alternativa geometrier den elliptiska (väsentligen den sfäriska, som grekerna faktiskt vad bekanta med, detta kan synas paradoxalt, men jag har inte utrymme att utveckla detta) och den hyperboliska. Man insåg nu att man i princip kunde välja postulaten som man ville huvudsaken var att de inte var logiskt motstridande (vilket däremot är en mycket delikat fråga). Däremot kan man inte hur som helst modifiera vårt sätt att resonera, detta är ’hårdvirat’. Sättet att resonera formulerades inte utförligt av Euklides, så begreppet ’axiom’ kom istället att beteckna postulaten. Den euklidiska geometrin är inte given av gud utan den är vårt eget verk definierad av de antaganden vi gör. Det är meningslöst att tala om huruvida reglerna i schack är sanna eller falska, schack är definierat av sina regler, men givet reglerna kan vi avgöra om det spelas korrekt eller inte. Vidare kan vi hitta på så många spel vi vill, men det är långt ifrån säkert att alla spel kommer att vara intressanta. Huruvida ett axiom-system är intressant eller ens konsistent är en fråga som ligger bortom vårt godtycke. Den tyske matematikern Hilbert som gick i bräschen för att förklara hur axiomen i viss mening utgör spel (och därmed fick ett oförtjänt rykte om att vara formalist) ville att man matematiskt skulle kunna visa att de traditionella axiomsystemen var konsistens, vilket kan ses som en moralisk ambition. Gödel visade dock att denna ambition kunde inte förverkligas i de verkligt intressanta fallen genom att följa i Hilberts fotspår och istället för att försöka reducera matematiken till logiken, undersöka logiken matematiskt. Detta ledde till ett stort genombrott och har, något paradoxalt, haft mycket litet inverkan på matematiken. Vad vi bevittnar härvidlag är något mycket mystiskt. Matematiken transcenderar den torra logiken.

AG Fråga 4: Är vetenskaplig sanning det primära målet inom matematiken? Har frågan om sannolikhet någon plats? Hur kan verifiering/bevisföring ifrågasättas?

UP Svar på AG fråga 4: Nej, den vetenskapliga sanningen är inte det primära målet för matematiker (matematiken själv har inga mål) dock sanningen är en nödvändighet. Det är sanningskravet som driver matematiken, liksom i all vetenskaplig verksamhet, fantasier kan inte existera i ett tomrum utan får form och mening först genom att konfronteras med en objektiv verklighet. I matematiken konfronteras vi med detta i den mest renodlade formen.

Sannolikheten tar givetvis plats inom matematiken i form av sannolikhetsläran som utgör en matematisk disciplin i vilken man söker finna sanna påståenden om sannolikhet, inte bara sannolika! Men detta var knappast frågan. Viss sannolikhet förekommer inom matematiken i form av hypoteser eller förmodanden. I begreppet matematisk förståelse ingår en känsla för vad som kan vara sant och rimligt i matematiken, utan en sådan skulle det inte finnas någon form av intuition. Men i matematiken kan man tillåta sig göra en distinktion mellan vad som rigoröst bevisats och vad som är förmodanden, inom andra vetenskaper kan man inte tillåta sig den lyxen alla påståenden är provisoriska (jag kan bara hänvisa till Poppers falsifierbarhet).

Men även inom matematiken råder denna metafysiska osäkerhet. Man kan inte bevisa att ett bevis är korrekt, men däremot motbevisa dess förmenta korrekthet genom att ge ett motexempel. Övertygelsen om ett bevis korrekthet får man dels genom att granska dess logiska uppbyggnad och dels genom att inte finna några motexempel, precis som i vetenskapen (men kanske motexempel kan dyka upp senare?). Standarden för vad som skall utgöra ett rigoröst bevis har utvecklats över tid, men det är värt att notera att Arkimedes krav på rigorös bevisföring var mer avancerad än den vad den matematiska kulturen på 1600- och 1700-talet ansåg. Euklides satser står sig än idag och konsensus inom matematiken om vad som är sant eller inte är frapperande jämfört med andra vetenskaper.

AG Fråga 5: Vad kan matematisk metod ha att lära till andra vetenskapliga discipliner inom andra fakultetsområden?

UP Svar på AG fråga 5: Den matematiska deduktiva metoden har traditionellt varit ett rättesnöre för all annan vetenskap. Det har att göra med precisa definitioner (jmfr Descartes och precisa och klara begrepp) logiskt tänkande och givetvis att kunna göra en distinktion mellan det sanna, och det enbart sannolika, för att inte tala om det falska. Man skall heller inte förglömma teoribildningen inom alla vetenskaper som är inspirerad av matematikens rent mentala konstruktioner. Däremot när det kommer till mer handfasta metoder är det tyvärr så att vad de flesta människor tänker på i samband med matematiken är siffror (torra eller inte) och därmed har matematiken identifierats med det kvantitativa. Denna ambition har speciellt varit tydlig inom samhällsvetenskaperna med ekonomin som det mest sofistikerade exemplet. Det grundläggande problemet är att kunna avgöra vilka kvantiteter som är meningsfulla och därmed lämpade för matematisk manipulation. Det är värt att notera att icke-matematiker tar siffror på mycket större allvar än matematikerna själva, ty bara att sätta en siffra på någonting anses som något objektivt och oemotsägligt.

7.8.6 KG Hammarlund

A. Kommentarer och frågor till Ulf Persson

Tack, Ulf, för ditt bidrag från ett fält där jag påminns om att min kompetens och fattningsförmåga är ytterst begränsad: Efter 15 sidor tappar jag fotfästet helt och återfår det inte förrän på de allra sista sidorna.

Några användbara rester av skolmatematiken har jag bevarat i minnet: procenträkning, Pythagoras' sats (praktisk för hemmasnickaren), reguladetri (omistligt redskap, tillsammans med räknestickan, i grafisk formgivning innan datorerna gjorde sitt intåg). Jag minns att vi i gymnasiet arbetade med derivata och binomialkoefficienter, men varför vi gjorde det förstod jag aldrig och jag skulle idag inte kunna upprepa de uträkningar jag då lyckades med.

Såtillvida skiljer jag mig nog inte från den majoritet som aldrig erfarit det du beskriver från din egen skoltid: att du *upptäckte* matematiken. Varför?

En del av förklaringen ligger säkert i den 'benägenhet för matematik' som du nämner och som individer kan besitta i större eller mindre grad. Men är det hela förklaringen? Vilken roll spelar skolans matematikundervisning för att några elever upptäcker matematiken medan andra aldrig gör det?

Du skriver:

> Man gör matematik genom att ha idéer och dessa är inte så lätta att finna. Man lär sig inte matematik genom att lära sig resultaten, d.v.s. lära sig teoremen fastän i många fall kan du tvingas att 'ta dem på orden', d.v.s. ta dem som ytterligare axiom (postulat) även om du inte nödvändigtvis förstår dem, vilket innebär att du inte förstår varför de skall vara sanna. Det viktiga i ett teorem är inte dess precisa formulering (såvida du inte använder det i en deduktivt länkad kedja) utan på vilken idé den är baserad...

Matematisk kunskap som förmågan att *göra* matematik har, som jag förstår det, inom mitt fält sin motsvarighet i förmågan att *göra* historia (i betydelsen analysera, tolka och dra slutsatser av historiska fakta). Den brittiske historiedidaktikern Denis Shemilt har skrivit om historisk kunskap som 'a form of knowledge', snarare än 'a body of knowledge' (Shemilt 1983). Hans tyske kollega Andreas Körber har skrivit att historisk kunskap inte handlar om det förflutna utan om hur vi tänker kring det förflutna (Körber 2011 s 151). Sådana tankegångar är förstås inte unika för historia som kunskapsfält utan rimligen lika giltiga för matematiken.

I 1994 års läroplaner för grundskolan och gymnasiet formulerades en definition där 'kunskap' beskrevs som något som kommer till uttryck i olika former – fakta, färdighet, förståelse och förtrogenhet – som förutsätter och samspelar med varandra. Skolans uppgift blir därför att skapa ett lärande där dessa former balanseras och blir till en helhet (Lpo 94 s 6).

Hur ofta skolan lyckas i denna föresats kan diskuteras – i historieundervisningen och gissningsvis också i matematikundervisningen. Fakta – från multiplikationstabellen till binomialsatsen – lärde jag mig. Färdighet, i betydelsen förmågan att lösa förelagda uppgifter, tillägnade jag mig också i någon mån. Förtrogenhet har jag utvecklat inom begränsade områden. Förståelsen har uteblivit – jag 'upptäckte' aldrig matematiken.

Är det möjligt att, med läroplanens ord, skapa ett lärande där matematisk kunskap blir en balanserad helhet där också förståelsen har sin givna plats – i grundskola och gymnasium och kanske lika nödvändigt i grund- och forskarutbildning på högskolenivå? En sådan förståelse, som kan synliggöra idén bakom ett teorem, torde ju vara en förutsättning för ett reflekterat metodval?

Just för att jag själv aldrig upptäckte matematiken vet jag inte om en sådan matematikundervisning är möjlig eller hur den skulle utformas – men jag skulle gärna ta del av dina tankar kring frågan!

Vänligen KG

Referenser:

Körber, Andreas: 'German History Didactics: From Historical Consciousness to Historical Competencies – and beyond?' i Bjerg, Helle, Lenz, Claudia & Thorstensen, Erik (red), *Historicizing the uses of the past: Scandinavian perspectives on history culture, historical consciousness and didactics of history related to World War II.* Bielefeld: Transcript 2011, 145-164.

Lpo 94: Läroplan för det obligatoriska skolväsendet, förskoleklassen och fritidshemmet. Stockholm: Skolverket 1994.

Shemilt, Denis: 'The Devils Locomotive', *History and Theory*, Vol. 22 (1983), No. 4, Beiheft 22: The Philosophy of History Teaching, 1-18.

B. Ulf Perssons (UP) svarskommentarer till KG Hammarlund (KGH)

Om jag förstår frågan rätt handlar det om hur man kan ändra läroplanen så att fler (alla?) elever upptäcker både nyttan och glädjen med matematiken. Jag är ganska pessimistisk och tror att detta överskattar skolans roll.

För det första skolan är tråkig, låt oss göra den roligare! Men skolans uppgift är att vara tråkig, det som är roligt kan man lära sig själv. Det är skolans uppgift att bestå med disciplin, d.v.s. att systematiskt och regelbundet ägna sig åt studier. Ser man det dag för dag gör man knappast några framsteg, däremot över det långa loppet.

Matematik var det tråkigaste ämnet i skolan. Vad fick man göra? Räkna och räkna och lösa oinspirerande uppgifter. Det hela var mycket enkelt, för enkelt. Jag minns inte att matematiken i skolan på något sätt tillförde mig något, att jag överhuvudtaget lärde mig något, bortsett kanske från att jag fick höra talas om pi och att läraren i sexan nämnde Pythagoras sats som ett kuriosum.

Mitt favoritämne var historia, som vår lärare berättade på ett föredömligt och medryckande sätt och jag sög in allt girigt. Detta är det värdefullaste minnet jag har av skolundervisningen i folkskolan. Den svenska historien, speciellt under Stormaktstiden, är mycket dramatisk och jag läste Fältskärns berättelser (tyvärr en förkortad upplaga i Saga biblioteket) med stor hänförelse. Undervisningen var även sofistikerad, det var inte bara fråga om någon nationalromantisk propaganda även om jag kanske var mest medveten om detta, men läraren lyckades även smyga in mycket annat som gav en mer nyanserad bild, så när jag i mogen ålder har tagit del av den svenska historien har jag inte funnit något som fått mig att i grunden revidera den uppfattning jag bibringades. Historia skall berättas i kronologisk ordning för barn, när man väl har fått en sådan grund kan man uppskatta detaljer och sätta dem i sammanhang.

Det är inte säkert att jag på egen hand skulle ha lyckats med detta, och det är här skolans kontinuerliga och uthålliga roll kommer till sin rätt. Min fru däremot utsattes för en nymodig pedagogik där eleverna skulle göra grupparbeten av olika delar av historien och så berätta för varandra. Det kan ta sig bra ut på pappret, men i praktiken kan det mycket väl bli en katastrof. Min fru har mycket suddiga uppfattningar om historien. Sedan är min upplevelse av historieundervisningen mycket subjektiv, de flesta klasskamraterna upplevde väl det hela som ett annat skolämne man tvingades plugga.

När det gäller matematiken bör jag kanske tillägga en annan meta-aspekt. Båda mina föräldrar var matematiklärare, vilket givetvis väcker misstanken att de undervisade mig, något som kanske alla klasskamrater tog för givet, något som var absurt och harmade mig djupt. Dock min mamma upptäckte tidigt min fallenhet för att räkna och uppmuntrade den, men framför allt fick jag mig inskärpt att matematiken var viktig genom att ha mycket hög intellektuell status, ja rentav den högsta (tillsammans med fysiken). Att jag var mycket duktig i matematik gav mig självförtroende, ja rentav ett existensberättigande, och skolan bekräftade detta, vilket var kanske dess viktigaste roll. Ännu djupare var nog insikten att matematik inte var ett vanligt skolämne, matematik behövde man inte plugga, och att plugga hjälpte inte i matematik. Och fanns det något mer föraktligt att plugga, det fick man lära sig både från klasskamrater och föräldrar. I de flesta andra ämnen måste man gissa sig till vad frågeställaren vill ha som svar *(ta* t.ex. så kallade intelligenstester) men i matematik behövde man inte gissa, vad som var rätt och fel beror inte på auktoriteters godtycke. Detta innebär en närmast moralisk aspekt på matematiken som jag tror spelar en mycket viktig roll för de flesta matematiker. Man brukar jämföra matematiken med musiken, och hävda att matematiker är musikaliskt begåvade (men aldrig att musiker är matematiskt begåvade). Detta är givetvis helt absurt, matematik och musik har inte med varandra att göra på det planet. Visst finns det formella kopplingar mellan musik och matematik (notskriften är ett exempel; eftersom jag inte kunde sjunga ansågs jag för helt omusikalisk, fick streck i sång, och beklagades för hur mycket jag gick miste om i livet; men däremot fascinerades jag av notskriften med de parallella linjerna och helnoter, halvnoter, fjärdedelsnoter etc, till lärarinnans förvåning) men denna koppling är helt trivial ur matematisk synpunkt och närmast irrelevant ur musikalisk. Vad som dock förenar dem är en slags ömsesidig sympati (som huvudsakligen matematiker är medvetna om). Det handlar just om denna naturliga fallenhet som är ett oåterkalleligt krav.

Pedagogik är ingen vetenskap. Försöken att genom social ingenjörskonst förbättra undervisningen och få alla entusiastiska och förstående, har visat sig ganska fåfänga. Pedagogik är en tradition som har evolverats fram under århundranden. Den traditionella matematikundervisningen har gått ut på att ge elever färdigheter inte i första hand förståelse. Förståelsen kan inte påtvingas den måste komma inifrån. Men utan färdighet, hur kan en förståelse uppkomma? Visst färdigheten bygger på en viss förståelse, liksom förståelsen måste växa fram ur färdigheten. Den elementära matematiken kan sammanfattas på ett par paragrafer, men det räcker inte för att anammas. Reguladetri, som du nämner, är en gammal kvarleva från Medeltidens undervisning, ur matematisk synpunkt är det en ren trivialitet, såtillvida att det endast rör sig om att multiplicera med bråk, och jag rynkade alltid näsan åt det, matematiksnobb som jag var. Men å andra sidan fyller den en pedagogisk uppgift ty att multiplicera med bråk uppfattar de flesta elever som något obegripligt och abstrakt, men det tänkande som ligger bakom reguladetrin är konkretare och förhoppningsvis mera tillgängligt. Den klassiska matematikundervisningen är kanske inte så dum egentligen trots, eller kanske snarare för, att den är tråkig. Kreativitet kan inte läras ut, endast förutsättningarna för en sådan, den är inte skolans ansvar utan individens. Förr i tiden hade praktiska räknefärdigheter ett värde, numera anses de föråldrade i och med digitala hjälpmedel, men den som saknar elementära räknefärdigheter hamnar i ett slags vakuum och tappar en väsentlig förankring med verkligheten. Detta är ett modernt (post-modernt?) fenomen, när folk blir mer och mer beroende av apparater som de inte har någon aning om hur de fungerar. Tekniskt sinnade personer kunde förr i tiden laga sina bilar själva, nu är allt så datoriserat att motorn, som tidigare var genomskinlig för den som visste var man skulle rikta blicken, har nu blivit till en svart låda. Förr var folk i allmänhet producenter och tillverkade sina egna prylar i stor utsträckning, nu är de bara konsumenter, vilket utarmar tillvaron.

Nej det finns ingen kungsväg till geometrin, som redan de gamla grekerna insåg. Har man inte det rätta sinnelaget kan man aldrig upptäcka matematiken, speciellt om man kräver att man alltid skall ha praktiskt nytta av vad man lär sig och har inget sinne för varken intellektuell skönhet eller nyfikenhet. De flesta människor har lika lite behov av derivator som medeltidshistoria och ser skolan som ett hinderlopp och en meningslös ritual att utstå innan man kan inlemmas i yrkeslivet.

Claes Uggla

A. Kommentarer och frågor till Ulf Persson

Vare sig matematiska processer (metoder), d.v.s. vad matematiker gör när de skapar matematik, eller matematiken som produkt – dess struktur och natur, avspeglas av den matematik och matematikundervisning som sker i skolan. Bidraget handlar därför om matematikens natur och metoder sett ifrån en matematikers perspektiv och matematiska upplevelser, konkretiserat och illustrerat med exempel där geometri utgör ett sammanhängande tema.

Några av författarens huvudpoänger ges i inledningen och hans exempel algebraisk geometri, vilket föranleder följande: Matematiska bevis skrivs inte för maskiner utan informellt för människor med överlappande utbildning, kunskap och värderingar, inom ett visst matematiskt område, där vissa ting tas för givna, vilket är nödvändigt för effektiv kommunikation. Matematik utgörs av långa deduktiva kombinatoriska kedjor utgående från axiomatiska system, inspirerade av och med rötter i verkligheten. Dessa system består av grundläggande (s.k. primitiva) väldefinierade begrepp, definitioner och konventioner, samt fasta deduktiva relationella regler/resonemangsprinciper i form av interagerande axiom och postulat, med kodifierad symbolisk teckennotation som verktyg. För att detta skall ske effektivt så behöver centrala idéer, mer eller mindre implicita i ett axiomatiskt system, inkorporeras i grundläggande definitioner och hjälpdefinitioner som fångar fruktbara strategier, understött av en koncis notation som underlättar (kombinatorisk) symbolisk manipulerbarhet. En lyckad sådan konceptuellt teknologisk formalism kan användas av vem som helst för att lösa problem som annars hade varit olösbara för de flesta och den lever dessutom sitt eget liv där den bidrar till en evolutionär organisk tillväxt som ofta leder till oväntade nya matematiska landvinningar.

Som författaren påpekar, matematikens axiomatiska grund har flera fördelar. Dels innebär den en transparens gällande matematiska resonemangs utgångspunkter, men den utgör även den mest stabila och tydliga avgränsning som någon vetenskap har, vilket utgör basen för matematikens progressiva djup, där resultat och kunskap utgör en fast grund för nya resultat och kunskap. En annan viktig aspekt som författaren poängterar är betydelsen av axiomatiseringens konsekvenser för felsökning (korrektioner av fel i bevis), eller snarare som en ingrediens i feedbackloopar involverande bredare kontexter där bristfälliga begränsningar korrigeras, illustrerat av författarens diskussion om Euklides femte postulat och utvecklingen till icke-euklidisk Riemanngeometri. Denna del av matematiken vidareutvecklades senare till differentialgeometri där t.ex. pseudoriemannsk geometri används inom Einsteins relativitetsteorier, där rum och tid är olika aspekter av det vidare begreppet rumtid, vilket exemplifierar den nära relationen och feedbacken mellan matematiska axiomatiska system och vår beskrivning av den fysiska verkligheten (angående författarens demokratidiskussion: förvisso är transparens nödvändigt för demokrati, men demokratins fördel jämfört med auktoritära system är dess möjlighet att låta transparensens konsekvenser få uttryck genom att med omröstningar korrigera fel och brister).

• Är det något författaren vill tillägga, modifiera eller betona?

Matematiska axiomatiska system är som sagt kopplade till verkligheten och vår uppfattning och kunskap om denna, men de är även en följd av kultur, inte minst kulturarvet från den extremt paradigmatiskt mönsterbildande axiomatiskt baserade Euklides Elementa, vilket har ovannämnda fördelar, men även nackdelar. En nackdel med detta kulturarv, som bidragit till att matematiken argumenterbart är den mest konservativa av alla vetenskaper, är att den givit upphov till en tendens bland matematiker att medvetet eller omedvetet dölja matematiska kreativa processer, extremt illustrerat av matematikerkollektivet Bourbaki. Som författaren dessutom själv skriver, man måste läsa mellan raderna för att hitta de idéer som utgör matematikens kärna, vilket knappast är ett optimum för matematikens utveckling. Nya medier har dock resulterat i nya möjligheter att visa matematikens krångliga kreativa sida, illustrerat av t.ex. Fieldsmedaljören Timothy Gowers, se t.ex

. https://youtube.com/c/TimothyGowers0.

• Vad tror författaren bör göras i skolan för att främja matematisk kreativitet?

• Vad behövs för att underlätta blivande matematikers kreativitet?

Författaren tar även upp förändringar gällande matematik som verksamhet. Han påpekar att det ställs allt högre krav på unga matematiker att snabbt bemästra ett stort antal sofistikerade tekniker och att matematisk forskning tenderar att bli mer modulär, d.v.s., att man tar allt fler tidigare resultat för givna, utan att till fullo förstå dem, där de används som byggstenar för att nå nya resultat, vilket är en följd av matematikens progressiva djup och något som även präglar andra progressiva discipliner, som fysik. Disciplinerrs progressiva karaktär leder dessutom till en ökad specialisering, där det dock samtidigt finns en tendens till att motverka detta genom synteser. Inom den teoretiska fysiken (mitt forskningsområde) finns det t.ex. drömmar om att skapa en förenad fältteori, en ”teori om allting”, vilket motiveras av fysikens tidigare framsteg. På motsvarande sätt finns synteser inom matematik, illustrerat av författarens exempel algebraisk geometri, eller, t.ex., Langlandsprogrammet som i sin yttersta form kan ses som ett försök att skapa en ”teori om all matematik.” Stora genombrott inom matematiken torde vare knutna till synteser som ger djupare förståelse genom att relatera skilda matematiska områden till varandra, nya idéer, metoder och perspektiv, samt speciella fall med strukturer som visar sig ha kopplingar till bredare sammanhang,.

• Kan författaren ge exempel på specialfall som genererat mer allmänna resultat inom matematiken?

•Om författaren skulle ranka de 5 främsta genombrotten i matematikens historia, vilka skulle de vara (och varför)?

• Vilka är de främsta matematiska genombrotten de senaste 50 åren?

I bidraget kontrasteras matematisk forskning, karakteriserad av att artiklar skrivs av en eller ett fåtal personer, mot s.k. big science där forskning utförs i stora forskargrupper. Det finns dock tendenser till att detta delvis håller på att förändras p.g.a. nya mediala möjligheter. Ett exempel är Thimothy Govers utnyttjande av sociala medier för att skapa gigantiska matematiska samarbeten, d.v.s. matematik just som big science. Det finns även andra tecken på att matematiken som kulturell disciplin är på väg mot omvälvande förändringar. De matematiska postdocs som jag arbetar med hävdar att nuvarande tjänsteutlysningar domineras av krav på inriktning mot maskininlärning/artificiell intelligens (ai). Jag noterar dessutom att de flera decennier gamla matematiska datorbevis som bidraget hänvisar till inte alls fångar vad som är på gång. Just nu pågår en aktiv debatt om och i så fall när maskininlärning/ai kommer att överträffa människan när det gäller matematisk bevisning, vilket sker gradvis där datorer till en början endast är ett kompletterande hjälpmedel, som dock förväntas ta över allt mer. Den här utvecklingen har dessutom givit ett uppsving för formalism (som författaren närmast tycks avfärda?), exemplifierat av allt större databaser med formaliserade definitioner och teorem som startpunkter för framtida ai algoritmer. I vilken grad och hur fort datorimplementerade algoritmer tar över matematik som deduktiv disciplin är dock en öppen fråga.

• Vad tror författaren om matematikens framtid?

Som teoretisk fysiker så är det kanske inte så märkligt att jag håller med författaren om att ”matematiken på ett fundamentalt sätt är kopplad till verkligheten.” Eftersom som jag ser detta som centralt, gör jag en lite längre utvikning. Fysik ger evidens för underliggande, oberoende av människan, stabila (oföränderliga?) mönster och samband i rum och tid (rytmer), som vi kallar för naturlagar. Matematik utgörs av symboliska mönster och relationer mellan abstrakta oföränderliga underliggande objekt (element), där dessutom abstrakta mönster genererar nya abstrakta mönster. Dessa är dock inte godtyckliga formella konstruktioner, utan de avspeglar människans behov av att hantera verkligheten och de lagbundenheter som präglar den, naturlagar och hur dessa har kommit till uttryck på jorden under människans evolutionära historia, där evolutionär utveckling utgjort och utgör en stabiliseringsmekanism (av såväl organismer som deras gener) i en delvis kontingent föränderlig miljö.

Inte bara människan utan även många andra djurarter har förmågor att representera och urskilja lägre antal av diskreta kvantiteter (som författaren påpekar) och t.o.m. genomföra enkla aritmetiska beräkningar, men de har även förmågor att göra approximationer och jämförelser av större antal, de har ett s.k. talsinne. Detta möjliggörs av numeriska försymboliska och förverbala kognitionssystem i form av avbildningar mellan fysiska kvantiteter och interna kognitiva representationer (t.ex. hos ryggradslösa djur, i små hjärnor utan cortex; vissa representationer finns t.o.m. hos encelliga organismer). Urskiljande, identifikation och representation av diskreta kvantiteter förutsätter en abstraktionsförmåga, d.v.s. en förmåga att filtrera ut, förenkla och idealisera ett fåtal egenskaper ifrån makroskopiska objekt som alla är unika och mer eller mindre föränderliga (det sker alltid ett atomärt utbyte med omgivningen för makroskopiska objekt, som alla består av sisådär minst 10^{21} atomer). Djurriket tycks även präglas av kognitiva förmågor som storleksuppskattningar av kontinuerliga (abstraherade) egenskaper som omkrets, area, tid, densitet, etc. (vissa neuroner tycks t.ex. vara känsliga för olika objekts storlek), där kognitiva kopplingar mellan numerocitet och kontinuerliga storleksuppskattningar är ett aktivt forskningsområde. Förmågan att urskilja, abstrahera och göra storleksuppskattningar, såväl diskreta som kontinuerliga, är djupt evolutionärt rotade då de har ett stort överlevnads- och fortplantningsvärde (de är t.ex. användbara för navigation i en omgivning, urskilja och undvika predatorer, finna mat, sociala och sexuella partners, etc.).

Dessa föranpassningar (preadaptioner) utgör basala startpaket som kombineras med människans andra egenskaper, t.ex. en lång barndom och lärandetid som i sin tur är relaterad till människohjärnans plasticitet. Det är därför inte så märkligt att människans matematiska förmåga nyligen inom experimentell neurovetenskap har relaterats till att hjärnan har områden som hanterar numerocitet, rum- och tidsuppfattning som skiljer sig ifrån områden för språk. Vad mer är, man har visat att dessa områden för matematik i hjärnan plastiskt förstoras hos matematiker och matematikanvändare, men p.g.a. hjärnans ändliga resurser på bekostnad av områden för ansiktsigenkänning.

Även om det finns starka kopplingar mellan fysisk verklighet och matematiska axiomatiska system så förklarar detta inte allt, eftersom de flesta kulturer inte har haft matematik (som deduktiv symbolisk disciplin), där matematik dessutom är relativt nytt i människans historia. Exempelvis bör det tilläggas att endast en liten del av matematiken faktiskt är direkt kopplad till verkligheten, även om det finns otaliga exempel på att ”ren” matematik oväntat har visat sig ha ”praktisk” användning. Fysik tycks t.ex. endast ha behov av vissa delar av Zermelo-Fraenkels axiom för mängdläran tillsammans med urvalsaxiomet, medan t.ex. teorin för transfinita tal och bestämning av storleken av oändliga mängder tycks vara irrelevant. Fysiker ställer sig dessutom tveksamma till om oändligheter överhuvudtaget är fysiskt realiserade. Vår intuitiva uppfattning om naturliga tal Ett, Två, Tre, … oändligheten samt tiden och rummets oändliga delbarhet är en följd av våra kognitiva abstraktions-, extrapolations- och interpolationsförmågor vilka tolkar en ändlig informationsmängd till något som involverar en abstrakt oändlighet (t.ex. består en film av ett ändligt antal bildrutor där om dessa presenteras med mer än 25 per sekund så uppfattar vi detta som ett kontinuerligt förlopp). Dessutom är alla mätningar, d.v.s. kvantitativa jämförelser, med nödvändighet ändliga. Exempelvis mäter vi hastighet med (enligt kvantmekaniken t.o.m. i princip) approximativa rums- och tidsintervall då det är omöjligt att mäta momentan hastighet, d.v.s. tidderivatan av position, men den är en synnerligen användbar idealiserad abstraktion.

Det kontinuerliga euklidiska rummet är långt ifrån självklart. Att det togs för givet av Euklides var en följd av hur vår intuition om verkligheten har formats av vår evolutionära historia, samt en serie kulturella händelser. Modern matematik har sina rötter i bl.a. handelstransaktioner och beskattning. I Mesopotamien hade man som man tyckte vara självklart olika längdmått för mätningar utefter och vinkelrätt gentemot floden, eftersom orientering av en areal gav olika skördar och därmed olika beskattningsunderlag. Det var först senare, när man inte var bunden till denna lokala region, man införde ett längdmått som kombinerades med begreppet orientering, vilket innebär en ökad flexibilitet och informationseffektivitet. Som författaren säger, i Euklides Elementa tar man för givet att man kan lägga kongruenta trianglar över varandra, en ekvivalens som inte alls var självklar tidigare (som kräver operationerna translation, rotation och reflektion, d.v.s. ytterligare ej självklara hjälpbegrepp). Från ett mer modernt perspektiv så visade Einstein med sina relativitetsteorier att rummets och tidens egenskaper man tidigare tagit för givna bara är lokala omständighetsberoende approximationer. Många teoretiska fysiker tror dessutom att extrapolationer av kvantmekanik och dimensionsanalys, dock långt bortom empirisk observerbarhet, tyder på att rum och tid på den s.k. Planckskalan är ”kvantiserade” och inte alls beskrivbara med euklidisk geometri.

I författarens 4-dimensionella exempel så beskriver han sig som matematisk platonist. Författaren tycks påstå att detta synsätt är ett av endast två möjliga perspektiv där det andra sägs vara postmodernismen som en modern version av sofismen. Jag uppfattar det senare som att författaren tolkar postmodernismen i sin extrema form där den präglas av en överdriven och ofta malplacerad skepticism, kunskaps- och åsiktsrelativism, etc. Detta är dock enligt min mening inte alls en nödvändig konsekvens av att inte anamma matematisk platonism, som grundar sig i en tro på att matematiska begrepp existerar i en platonsk, oberoende av människan, idévärld (hur då om de inte existerar i den fysiska världen?) i vilken matematiker upptäcker matematiska samband. Förvisso så upplever var och en som bedriver matematik platonska matematiska känslor, något som t.o.m. kanske är en psykologiskt nödvändigt för att bedriva framgångsrik matematik. Dock avspeglar känslor inte alltid verkligheten speciellt väl. Dessutom, matematiker som t.ex. Penrose och Gödel uttrycker vitt skilda versioner av matematisk platonism, vilket visar på en djupare problematik. Vad mer är, bara för att modern matematik är en kulturprodukt innebär detta inte att man med nödvändighet hamnar i postmoderna överdrifter. När allt kommer omkring, som jag ovan försökt indikera, matematiken som mänsklig kulturprodukt är inte en godtycklig kulturprodukt; tvärtom är matematiken en av människans främsta kulturprodukter med synnerligen djupa kopplingar till den fysiska verkligheten, men där vissa delar har att göra med hur vi effektivt behöver hantera vår begränsade kognitiva förmåga (exempelvis torde den matematiska notationens utveckling delvis vara en följd av ”brainfitting”). Matematiska abstraktioner som t.ex. involverar perfekta cirklar eller extrapolationer som Ett, Två, Tre,… oändligheten, kan ses som reduktionistiska idealiseringar som utgör en effektiv strategi för att nå holistiska slutsatser om såväl den fysiska som den mänskliga psykologiska (tänk t.ex. neurala nätverk) och sociala världen (tänk t.ex. statistik). Jag noterar att det finns djupa kopplingar mellan matematisk reduktionism och metodologisk (Galileisk) reduktionism inom de fysikaliska naturvetenskaperna.

• Med tanke på ovan kanske författaren vill kommentera och fördjupa sitt eget bidrag när det gäller matematisk platonism och vad han menar med postmodernism?

Författaren verkar dessutom vara indignerad(?) över humanismens uppdelning i att förklara och förstå där han tycks hävda att matematiken står för en synnerligen djup förståelse, vilket jag i så fall håller med om. Förstå är enligt min mening att relatera olika ting till varandra på ett konsistent sätt, vilket definitivt matematiken gör. Men uppdelningen förklara – förstå, som ursprungligen kommer från Wilhelm Dilthey i samband med hermeneutik och som därefter har lett till otaliga diskussioner inom människovetenskaperna, har enligt min mening sina rötter i att det faktiskt finns stora skillnader mellan dessa och naturvetenskaperna och matematiken. Människor har en simuleringskapacitet, fantasi, att tänka möjliga och omöjliga världar, att ha känslor, värderingar och intentioner, samt en empatisk förmåga att förstå att även andra människor har dessa förmågor. Dessa teleologiska och empatiska dimensioner ger upphov till interaktioner mellan individer och grupper av individer som inte finns inom naturvetenskaperna och matematiken, vilket bidrar till nya avgränsningsegenskaper och tolkningssvårigheter i anslutning till människors subjektiva världar. Författarens exempel om schack illustrerar en del av detta: ett schackparti mellan två personer är inte bara en fråga om att räkna ut kombinatoriska möjligheter: det finns en motståndare vars intentioner och subjektiva värld man behöver förstå och påverka. Vad man borde prata om inom människovetenskaperna är empatisk teleologisk förståelse och tolkning; distinktionen förklara (i termer av orsak-verkan-beskrivning) och (tolknings-)förståelse fångar, enligt min mening, inte alls de essentiella skillnaderna mellan människovetenskaperna, naturvetenskaperna och matematik.

Däremot är fruktbarheten i att vandra mellan delar och helhet i något som liknar en hermeneutisk cirkel/spiral ingalunda förbehållet humanvetenskaperna. Som det står i bidraget: ”Sensmoralen är att i matematiken har vi inte bara allmänna principer men också en rikedom av specifika individuella objekt vars existens ofta synes mirakulösa och är av stort inneboende intresse”. Det senare är inte så märkligt då de har fler strukturer som kan utnyttjas. Men det är inte ovanligt att man även genom speciella exempel väljer att omvärdera och generalisera vissa matematiska strukturer och därmed påverka hur man ser på matematik i större sammanhang, vilket visar på betydelsen av interaktion mellan delar och bredare kontexter.

Slutligen, jag kan inte motstå att kommentera författarens påståenden om att om jorden hade befunnit sig i den interstellära rymden så skulle astronomin ha upptagit en position mellan matematiken och de fysikaliska vetenskaperna. I och med satelliten Gaija så ökade nyligen vår förmåga att mäta avstånd med parallax med en storleksordning till ca 30000 ljusår, d.v.s., vi är nu på god väg att med parallax mäta intergalaktiska avstånd. Vad mer är, positivismens och sociologins fader Auguste Comte hävdade att det var meningslöst att spekulera om stjärnor långt bort eftersom vi omöjligt skulle kunna empiriskt veta något om dem. Strax därefter gjorde spektroskopin sitt genombrott och man fann t.ex. att både solen och stjärnorna i huvudsak bestod av väte och helium; efter ytterligare ett halvt sekel visade Cecilia Payne-Gaposchkin och Meghnad Saha, oberoende av varandra, att den då nya kvantmekaniken kunde tillämpas inom astronomin vilket på allvar fysikaliserade den (d.v.s., avståndsmätningar är långt ifrån allt inom astronomins fysikalisering). Jag kan konstatera att det historiskt sett har varit ett misstag att underskatta de fysikaliska vetenskaperna!

B. Ulf Persson (UP) svar och svarskommentarer till Claes Uggla (CU)

CU Fråga 1: Är det något författaren vill tillägga, modifiera eller betona?

UP Svar på CU fråga 1: Modifikationer och tillägg kommer automatiskt att ingå i nedanstående kommentarer. Låt mig bara påpeka att långa deduktiva beviskedjor är inte vad som övertygar, ty dessa kan bli så långa att en rent mekanisk verifikation av dem inte inger någon förståelse. Jag brukar påpeka att formella bevis kan liknas vid pixelrepresentationer av bilder. Dessa har sina uppenbara fördelar, men att delge en pixelframställning, säg av ett par miljoner pixlar, ger ingen förståelse för vad pixlarna representerar. Resonemang och resultat blir övertygande i den mån det passar in med andra resultat och förklarar dessa. Detta är givetvis inte ägnat att överge logiken, utan bara att komplettera den. Man brukar ofta beskriva komplementet i termer av intuition, ett intuitivt begrepp i sig själv som undanflyr en formell definition.

I beskrivningen av demokrati tar röstningen oproportionerlig stor plats det är därför jag medvetet inte nämnde den. Utan en demokratisk infrastruktur är val meningslösa. Begreppet folkviljan är ett mycket suddigt begrepp och att folket kan uttrycka sin mening i de flesta fall endast en sentimental villfarelse; men givetvis utan möjlighet till val kan inte makthavarna hållas ansvariga och det, enligt Popper, enda sättet att avskaffa en makthavare utan blodsutgjutelse. Inom matematiken avgörs inte korrekthet genom omröstningar.

I de flesta fall är utslaget av ett val en fråga om tillfälligheter ty en stor del av väljarna kan inte ge underbyggda skäl för sina val, inte ens när det gäller det egna egenintresset. Som exempel fick både Al Gore och Hilary Clinton de flesta röster men på grund av konventionen med delegater förklarades motståndarna segrare. Det kan ligga nära till hands att anse att de vore de rättmätiga vinnarna, men detta är en sentimentalt baserad åsikt på grund av det jämna läget och tillfälligheterna. Allmänna val har många nackdelar, det uppmuntrar populism och korta perspektiv, men fördelarna är att de ger upphov till maktskifte om än genom procedurer som inte skiljer sig nämnvärt från myntkast. Dock skall erkännas att i vissa situationer de faktiskt kan göra en skillnad.

CU fråga 2: Vad tror författaren bör göras i skolan för att främja matematisk kreativitet? Vad behövs för att underlätta blivande matematikers kreativitet?

UP Svar på CU fråga 2: Bägge dessa frågor är uppenbarligen relaterade och kan besvaras mer eller mindre samtidigt. Begreppet 'kreativitet' används i alla möjliga och omöjliga sammanhang och har blivit något av en floskel. Genuint kreativa individer talar sällan om kreativitet. När det gäller denna fråga är jag benägen att hålla med Popper när han talar om statens ansvar för individen. Den skall skydda individen, d.v.s. undanhålla den plåga, men har ingen möjlighet eller ens rättighet att bekymra sig om dess lycka, det är individens eget ansvar. På samma sätt med kreativitet, den kan inte läras ut, d.v.s. påtvingas, utan måste komma inifrån. Skolan kan tillhandahålla baskunskaper, vad individen gör med dessa är dennes eget ansvar. Det talas så mycket om skolan skall vara rolig och fostra elever till både fritt och kritiskt tänkande. Ja dessa två skenbart motsägande aspekter är intimt förbundna med varandra, ja det ena förutsätter det andra och jag brukar påpeka att endast med hinder att övervinnas stimuleras fantasin. Och när det gäller det roliga vill jag hävda att skolan skall vara tråkig, ty det som är roligt lär man sig lätt själv. Vad skolan kan bidraga med är dels en disciplin, dels ett tillhandahållande av kontakter. Ett sådant exempel är den euklidiska geometrin med strikta bevis som jag kom i kontakt med i realskolan, ett moment som numera är borttaget i den moderna skolan. Visst för det stora flertalet av elever var detta bara ett nytt hinder läraren lägger till i det hinderlopp som skolan utgör för många elever, men en och annan, inte sällan oväntad, kan fascineras. Det mesta jag lärt mig under livet. och detta gäller även skoltiden, har jag gjort på eget bevåg inte genom att läsa läxor, men jag skall inte förneka att skolan gett många impulser till detta. Jag är ganska övertygad om att den gamla, tydligen så förhatliga, skolan var betydligt bättre på att främja kreativitet är den moderna trots dess förment överlägsna pedagogik. Min far som var matematik och fysiklärare satte en ära i att formulera krävande uppgifter på skrivningar, vilket jag fruktar att den moderne läraren i gemen är både ointresserad av och oförmögen till. Pedagogikens roll i skolan är övervärderad det viktiga är kunniga och intellektuellt engagerade lärare som skapar en gynnsam mylla för att väcka just kreativitet.

Bourbaki nämns oftast som avskräckande exempel på matematisk formalism men jag finner den ganska oskyldig därvidlag. Dess framställning är utmärkt för vissa delar av matematiken, mindre så för vissa andra. Man skall komma ihåg att monografier och artiklar skrivs för att dokumentera inte i första hand för att instruera (numera tycks det oftast endast vara en fråga om ett byråkratiskt krav på aktivitet och därmed förknippad befordran, men detta är en annan historia). Visserligen är den logiska presentationen informell men sällan förklarande; vad det hela egentligen går ut på får läsaren lista ut själv. Om läsaren är en expert på området kan denne snabbt identifiera de få springande punkterna i framställningen och ignorera den mesta av texten såsom varandes utfyllnad och transportsträckor. En diskussion med en kollega i lunchkön kan inte sällan vara mer givande än att läsa en rigorös artikel eftersom en sådan kan fokusera på det kritiska och ignorera det rutinartade. På samma sätt kan ett konkret exempel vara mera upplysande än en omsorgsfullt formulerad definition, ty det tillåter en att fylla ut detaljerna själv och ana vad det hela egentligen går ut på. Det är ofta bättre att själv finna ett bevis, låt vara med en och annan 'hint' än att presenteras för ett fullständigt bevis. För att kunna förstå ett svar måste man förstå frågan, och nackdelen med traditionella framställningar är att frågan inte förklaras tillräckligt (men om artikeln endast läses av experter inom området är det obehövligt). Som redan nämnts ingår i en matematikers utbildning att lösa problem alltifrån enkla för att bekanta sig med terminologi till mer utmanande. Egentligen kan ingen skarp gräns dras mellan ett övningsproblem och ett forskningsproblem; mycket av vad som publiceras i matematiken är i form av lösta övningsexempel vilket kan vara mycket värdefullt för författarna, men kanske mindre för dennes kolleger, för att inte tala om matematikens utveckling. I Bourbaki vimlar det faktiskt av övningsexempel och en student som försöker lösa de flesta av dem får en utmärkt duvning. Jag kan kanske tillägga att jag personligen finner de verk skrivna av Grothendieck, 1900-talets främste algebraiske geometer, helt oläsbara, vilket bottnar i en temperamentsfråga. Den geometri som presenteras är alltför generell och abstrakt för min smak, kanske jag inte är en riktig matematiker?

CU Fråga 3: Kan författaren ge exempel på specialfall som genererat mer allmänna resultat inom matematiken?

UP Svar på CU fråga 3: Så gott som alla generella resultat har uppstått från specialfall. Detta gör det både svårt och i princip enkelt att ge exempel. Svårt, eftersom det blir svårt att välja, enkelt eftersom i princip varje allmänt resultat kan ge ett exempel. Men låt os ta följande, även om det kanske inte är det mest pedagogiska.

1) Betrakta rationella funktioner på Riemansfären (ekvivalent med den projektiva linjen över de komplexa talen). Dessa kommer av nödvändighet ha lika många nollställen som poler (räknade med multiplicitet) d.v.s. graden av nämnaren är lika med graden av täljaren. Men z då? Den har ett nollställe, men ingen pol. Men i homogena koordinater skrivs den z_1/z_0 och $z_0 = 0$ motsvarar en pol i oändligheten. Givet presumtiva nollställen och poler, kan man finna en rationell funktion på Riemannsfären med dessa. Jo det är enkelt man kan skriva ner det explicit på ett uppenbart sätt, speciellt kan man forma vektorrum av sådana rationella funktioner och beräkna dimensionerna.

2) Detta kan utvidgas till nästa fall, kurvor av genus 1, d.v.s. torusar med komplex struktur. Här kan man faktiskt finna en direkt analogi med polynomen ersatta av så kallade thetafunktioner.

3) Man kan utvidga till högre genus (kurvor med fler ’hål’) men då blir det betydligt värre att ge konkreta exempel, man får nöja sig med att beräkna dimensioner. Vi är nu framme vid mitten av 1800-talet och den berömda Riemann Roch sats som utgör ett centralt tema i den algebraiska geometrin.

4) Riemann-Roch kan utvidgas till godtyckliga kompakta komplexa mångfalder vilket gjordes av Hirzebruch på 1950-talet.

5) Grothendieck utvidgade det till scheman över scheman, där Hirzebruchs resultat reduceras till scheman över punkter.

CU Fråga 4: Om författaren skulle ranka de 5 främsta genombrotten i matematikens historia, vilka skulle de vara (och varför)?

UP Svar på CU fråga 4: Ordet ’genombrott’ ger associationer till plötsliga snilleblixtar som förändrar världen eller utgör den förlösande faktorn som gör att ett problem får en lösning efter en lång tid av gäckade försök. Jag skall ta det i något vidare mening.

- Grekernas deduktiva framställning av matematiken, speciellt geometrin.
- Positionssystemets genombrott
- Algebrans inträde
- Infinitesimalkalkylen
- Algebraiska strukturer

Så låt oss kommentera i tur och ordning

Betydelsen av detta kan inte överskattas, de lade grunden för den västerländska matematiska traditionen, vilken är den enda existerande, allt annat är distraktioner. Så kallad ’etnomatematik’ kan ha sitt intresse, men knappast ett matematiskt. Det kan även vara intressant att se den historiska utvecklingen av matematiken, men den som skett utanför den grekiska västerländska traditionen har mycket begränsad relevans. Det är i detta sammanhang modernt att tala om västerländsk kulturellt förtryck (för att inte tala om det hela i genustermer, vilket är kvalificerat nonsens) men det kan vi lämna å sidan. Det finns inget som motsvarar akupunkturen inom medicinen i matematiken. (Ramanujam har ibland framställts som en originell matematiker utanför den västerländska traditionen. Han var givetvis originell, men originaliteten var personlig och inte konsekvensen av en annan tradition. Han lärde sig själv matematiken från en västerländsk ’primer’ av synnerligen dålig kvalité, vilket bland annat resulterade i att han inte skrev ner formella bevis).

Dock skall man sätta det i perspektiv. Logiskt resonemang är inget nytt inom matematiken, logiskt tänkande tillhöra den normala mänskliga kognitionen; som C.S.Peirce påpekar, matematiker behöver inte studera logik, den har den gratis. Vad som utmärker den euklidiska framställningen är att systematiskt presentera en logiskt tvingande framställning från första principer med syfte att ge transparens. Detta är en långt ifrån enkel uppgift. Aristoteles gav, som Wedberg poängterar i sin filosofihistoria, en axiomatisering av syllogismer, som saknar de tekniska skavanker som Euklides framställning är behäftad med, och som dessutom föregick Euklides; men Euklides uppgift var betydligt svårare och ambitiösare, och skavankerna skall ses som oskyldiga skönhetsfläckar.

Den moderna synen på en axiomatisk framställning skiljer sig från den ursprungliga i och med att den är betydligt mer formellt inriktad. Axiom är bara regler i ett spel, och matematikens uppgift är att systematiskt härleda konsekvenser. Detta ger det en mekanisk aspekt som inte var framträdande historiskt. Euklides skilde även mellan axiom och postulat, de förra hade att göra med logiska principer, de senare med uppenbara förhållanden mellan de begrepp man studerar; numera talar vi bara om axiom i den klassiska meningen av postulat, principerna för det logiska tänkandet tas för givna (när det gäller mängdläran kan man se urvalsaxiomet som ett gammaldags axiom eftersom det postulerar giltigheten av ett tankeexperiment). Men när det gäller överuppräknelig mängdlära är dessa tankeexperiment inte lika självklara längre (man kan inte uttömma en överuppräknelig mängd genom att ta bort ett element i taget ens i oändlig tid) och det har dessutom kontraintuitiva konsekvenser, som Banach’s paradox. Att reducera matematiken till ett axiomatiskt spel är att se på matematiska teorem som tautologier och därmed även kunna reducera matematiken till logiken, vilket var Russells missriktade ambition. Detta är även vad som ligger bakom ambitionerna att bedriva matematik vis artificiell intelligens.

Men som sagt vad den deduktiva framställningen av matematiken har gett den en unikt mått på transparens och en obenägenhet att ta ’uppenbara’ påstående för givna; att ifrågasätta kan öppna nya oväntade vägar. Jag påminner om att jag brukar likna den deduktiva framställningen av matematiken med pixelframställningen av bilder. De har uppenbara fördelar, men ger den mänskliga kognitionen högst begränsade möjligheter att uppleva en bild. Deduktionen inom matematiken är inte tillräcklig men den ger ett oundgängligt stöd.

För en matematiker är inte detta ett matematiskt genombrott, men inte desto mindre har det haft ett fundamentalt inflytande på tillämpningen av matematiken och utgör den enda delen av matematiken som de flesta människor kommer i kontakt med, och även för blivande matematiker utgör det den första kontakten. Det skedde inte över en natt, babylonierna hade ett positionssystem liksom Mayafolken, men decimalsystemet slog inte igenom i Europa förrän i sen medeltid. De uppenbara matematiska fördelarna var att godtyckligt stora tal kan i princip skrivas ner, ty man behöver inte hela tiden uppfinna nya tecken för stora tal. Olika språk inkorporerar det i högre eller mindre grad, dock i en komplicerad form. Om A, B är två tal och $A < B$ betecknar AB produkten $A \cdot B$ om $A > B$ betecknar den $A + B$ (tänka på ’fyra hundra’ versus ’hundra fyra’ i svenskan). I och med positionssystemet uppstår relativt enkla algoritmer för de elementära aritmetiska operationerna (hur hanterade man de romerska siffrorna? svaret är enligt min mening inte alls, de hade rent ceremoniella och dekorerande uppgifter, när det kom till beräkningar använde man en abacus som är en implementering av positionssystemet). Den stora fördelen med positionssystemet är decimalbråk. Givet två bråk är det inte så lätt att med ett ögonkast avgöra vilket som är större och vilket som är mindre, än mindre hur nära de är varandra. Detta har speciell relevans när man ställer upp numeriska tabeller då man lätt kan se hur värdena varierar och finna interpolationer. En viktig innovation var Napiers logaritmer som gav upphov till logaritmtabeller, ett ovärderligt redskap fram till 60-talet, också fysiskt implementerat i räknestickor, som unga människor av idag inte ens känner till. Vad Napier gjorde var i retrospekt en numerisk integration av $1/x$ (varvid han definierade naturliga logaritmer, det var Briggs som gjorde det hela kommersiellt gångbart genom att introducera logaritmer baserade på basen tio vilket bara innebar en multiplikation med gemensam faktor till Napiers logaritmer). Vad folk inte känner till är att trigonometriska tabeller kan underlätta multiplikation på grund av bland annat den trigonometriska identiteten $\cos(x)\cos(y) = {}^{1}(\cos(x + y) + \cos(x - y))$ som reducerar multiplikation till addition och slående i tabeller, visst man måste normalisera varje faktor genom att multiplicera med en lämplig tio potens för att kunna skriva det som ett cosinus, men det är trivialt. (Detta belyser än en gång matematiska tabellers värde). Visst, decimalbråk är bara specialfall av allmänna bråk genom att restrikera nämnare till potenser av tio. Varför 10? Inte en matematisk fråga utan en som rör mänsklig kognition. Använder vi basen två behöver vi bara memorera två tecken - 0,1 - och additions- och multiplikationstabeller blir triviala. Nackdelen är att talen blir så långa och ser så lika och enahanda ut att det blir svårt att skilja dem åt. Om 10 utgör en optimal avvägning vill jag inte uttala mig om, men att lära sig några nya siffror till vore inte oöverstigligt, dock att ha sextio olika tecken skulle göra memoreringen av multiplikationstabeller en mardröm, det babyloniska systemet med basen 60 utgjordes i praktiken av en hybrid.

En matematisk konsekvens av positionssystemet och decimalbråk är följder av approximeringar som man kan modifiera genom att succesivt lägga till termer som i potensserier och Fourierserier. Idén är gammal inom astronomin, tänk bara på Ptolemois och successiva additioner av nya epicykler vilket kunde obegränsat approximera planeternas rörelse. (Existerade epicyklerna fysiskt? Men de var effektiva för beräkningar och kränkte inga religiösa känslor.)

Algebran hade som ursprunglig uppgift att mekanisera matematiken att kunna härleda resultat utan förståelse och istället genom ren manipulation vilket jag försökte illustrera med att sätta den kartesianska analytiska geometrin i motsats till den mer syntetiska euklidiska geometrin. Detta utgjorde ett fundamentalare genombrott än både den deduktiva matematiken för att inte tala om positionssystemet, när det gällde att producera matematiska resultat. Hela den framtida matematiken skulle ha varit omöjligt utan algebran, ta bara sådana exempel som aritmetiseringen av rummet via koordinater.

Algebran upplevs av de flesta elever som ett ytterligare plågoredskap, en slags bokstavsräkning, om bara får mening i och med att bokstäverna ersätts av tal (en uppfattning av algebran som psykologen William James ger uttryck för); därav synen på formler som något statiskt i vilket man skall sätta in numeriska värden. Ja i själva verket något som löser alla matematiska problem bara man får reda på vilken formel man skall använda. För en matematiker är formler dynamiska enheter som skriker efter att bli (algebraiskt) manipulerade.

Här har vi ett genombrott till vilket man faktiskt kan knyta namn, mer specifikt Newton och Leibniz (vilket gav upphov till en bitter prioritetsstrid, mest från Newtons och hans brittiska adepters sida). Att det var revolutionerande insåg samtiden, och även om man kan se det som slutpunkten på en lång process med början med Arkimedes och en del medeltida skolastiker, så var upphovsmännen inte medvetna om sina historiska föregångare. Infinitesimalkalkylen, som involverade gränsvärden, var inte rigoröst grundad, vilket kan ha föranlett Newton att gömma den i sin Principia och formulera det hela i euklidisk anda. Rigorös blev den först i början av 1800-talet, och på senare tid har en del logiker försökt sätta det klassiska intuitiva tänkande på logisk grund, vilket jag personligen finner av begränsat intresse (jag har inget emot t:'s och δ' när det kniper). Newton utvecklade sin infinitesimalkalkyl fysikaliskt, medan Leibniz såg det betydligt mera ur en formalistisk synpunkt. Leibniz notation var överlägsen Newtons med sina 'dots' och blev den som överlevde. Leibniz formella sida kommer i uttryck till att han skrev ner allmänna formler som derivatan av en produkt, och lär enligt matematikern Arnold först ha trott att denna var produkten av derivatorna, en tanke som aldrig skulle ha fallit Newton in, denne lär heller aldrig brytt sig om att presentera sådana formler såsom varande alltför uppenbara, och därför känner vi den som Leibniz formel. Infinitesimalkalkylen utvecklades inte i England utan på kontinenten av matematiker som

Bernouille familjen och Euler. Den senare var historiens mest produktive matematiker men bekymrade sig inte om rigorösa argument, men hade rätt ändå. Man kan bedriva framgångsrik matematik utan att låta sig snärjas av logisk stringens, förutsatt att man är ett geni som Euler, nu skulle det inte accepteras, även om vi i våra dagar har spekulativa matematiker, men de är sällsynta.

Infinitesimalkalkylen hade inte kunnat utvecklas utan en utvecklad algebra av vilken den sågs som en oändlig variant (Newton betraktade ju oändliga potensserier som generaliserade polynom). Hela 1700-talet kan ses som en matematisk explosion möjliggjord genom denna kalkyl, speciellt matematiska modeller för fysiken via partiella differentialekvationer vilket närmast blev en synonym för fysiken.

1800-talet blev en matematisk guldålder vars enda rivaliserande sekel är (än så länge) 1900-talet. Det är svårt att peka på några specifika genombrott, men om tvingad är jag frestad att ta i beaktande utvecklingen av algebraiska strukturer som de klassiska 'grupper, ringar, kroppar' i matematikundervisningen på universiteten. Detta avspeglar såväl en ökad abstraktion inom matematiken, som strävanden efter allmänna synteser, som inte var något framträdande under tidigare sekel.

CU Fråga 5: Vilka är de främsta matematiska genombrotten de senaste 50 åren?

UP Svar på CU fråga 5: Skall man ta detta bokstavligt talar vi om åren efter 1970 och då blir det lite missvisande ty de genombrott som inträffat under dessa år bygger på genombrott som ägt rum tidigare. Exempelvis Grothendieck hoppade av matematiken 1970 men hans inflytande har sedan dess varit enormt och många av genombrotten sedan dess har byggt på hans egna främst under tidigt 60-tal. Om man skall begränsa sig till att ge en lista baserad på sensationalism kan man med fördel ta del av en lista av Fieldsmedaljörer under det senaste halvseklet, även om långt ifrån alla genombrott har gjorts av Fieldsmedaljörer, en medalj som instiftades inte så mycket för att belöna matematiker, som fallet med Nobelprisen, men för att uppmuntra unga matematiker. Men låt oss gå för en sådan. Den kommer att skilja sig från den förra listan genom att genombrotten är betydligt mera specifika och ändrar i grunden ingenting av matematiken, dock så utgör de imponerande kraftprov och kan direkt kopplas till teorem i motsats till de föregående. Listan kommer av nödvändighet bli något subjektiv dock utan att vara speciellt kontroversiell.

Delignes bevis av Weilhypotesen som kortfattat kan beskrivas som Riemannhypotesen för ändliga kroppar. Hypotesen formulerades av André Weil (en av 1900-talets främsta matematiker) på 40-talet. Alexander Grothendieck (kanske 1900-talets främste matematiker), som i grunden ändrade den algebraiska geometrin och formulerade den allmänna strategin för det bevis som hans student Deligne lyckades genomföra. Detta skedde 1973.

Banbrytande arbeten inom differentialgeometrin på 80-talet av Micheal Freedman och Simon Donaldson angående 4-dimensionella kompakta mångfalder. Freedmans bidrag kan formuleras som den 4-dimensionella versionen av Pointcaréhypotesen (se nedan)

Ditto om 3-dimensionella kompakta mångfalder av nestorn inom området William Thurston och det uppmärksammade beviset av Perelman av den sekelgamla Pointcaré hypotesen att enkla sammanhängande 3-mångfalder är homeomorfa med den 3-dimensionlla sfären.

Wyles bevis för Fermats sats. Denna sats är i sig själv ganska ointressant, men den har stimulerat mycket fruktbar talteoretisk teori sedan 1800-talet. Wyles bevisade en mycket kraftfull sats om elliptiska kurvor (vilket var hans specialitet) definierade över de rationella talen (kan ges som en ekvation $y^2 = x^3 + Ax + B$ med rationella koefficienter A, B) kan parameteriseras modulärt. Som synes är formuleringen mycket teknisk (liksom i de andra fallen) och skulle kräva ett par sidor med förklarande text, så jag avböjer.

Jag skulle kunna lägga till ett dussin liknande bedrifter (t.ex. inom Langlandsprogrammet eller Moriteorin för klassificering av lågdimensionella algebraiska variteter, för att inte tala om klassificeringen av ändliga enkla grupper).

CU fråga 6: Vad tror författaren om matematikens framtid?

UP Svar på CU fråga 6: Fyrfärgsproblemet, Fermats förmodan, och Riemannhypotesen utgjorde tre klassiska problem. Av dessa är det första mycket enkelt att presentera för lekmannen utan några som helst matematiska kunskaper, det andra kräver endast en rudimentär förtrogenhet med algebraisk notation, medan det tredje är det matematiskt mest intressanta, och som teorem, i motsats till de två första har det en rikedom på matematiska tillämpningar. Ja många 'teorem' inom talteorin är bevisade 'modulo' Riemannhypotesen, d.v.s. den antas vara sann. Jag skulle kunna på en sida ge en populär presentation, men låt mig nöja med att framhålla att det ger en oväntad koppling mellan talteori och teorin för analytiska funktioner som går tillbaka till Riemanns definition av Riemann zetafunktionen. Det är denna oväntade, för att inte säga, mystiska sammanhanget mellan helt skilda delar av matematiken som utgör dess charm och manifestation av dess platonska natur. Medan de två första problemen har lockat många rena amatörer att försöka, ligger den tredje helt utom räckhåll för att ens kunna presentera rent banala observationer.

Fyrfärgsproblemet löstes 1976 och var ett totalt antiklimax. Som bekant löstes det med hjälp av dator, inte så att datorn fick den direkta frågan utan som resultat av att författarna hade gjort en ingående programmering som i princip utgjorde en strategi för beviset och datorns uppgift blev att fylla i detaljer. Mer specifikt hade beviset reducerats till ett ganska stort antal specialfall, var och ett alltför omständligt för en människa att gå igenom, men tydligen av rutinartad karaktär och inga nya idéer krävdes. Detta bevis gav upphov till många djupgående kontroverser. Först, beviset var så långt och komplicerat att ingen mänsklig individ skulle ha en möjlighet att kontrollera det utan vi var helt hänvisade till att lita på maskinen (samt även korrektheten i programmeringen) vilket kändes djupt otillfredsställande, tänk om datorn hade haft en tillfällig hårdvarumalfunktion någonstans i processen? Till detta kan man anmärka att datorer stundligen gör omfattande beräkningar som vi inte har någon möjlighet att kontrollera för hand, utan har valet att åtminstone provisoriskt lita på dem eller helt enkelt avsäga oss någon möjlighet alls att ta del av den information som kanske datorn kan ge oss. Man kan hävda att denna pragmatiska inställning är helt oacceptabel för bevis som skall hålla i evinnerliga tider, matematikens sanningar är ju eviga. Om matematikens sanningar kan vi inte uttala oss, däremot om matematikers sanningar, som liksom i vetenskapen för övrigt är underställda möjligheten av framtida modifieringar. Att bedriva matematik är ju en mänsklig verksamhet med allt vad detta innebär. Maskinens hårdvara kan vi lämna därhän, vad som däremot är meningsfullt att göra är att gå igenom datorprogrammets relevans. Vi kan helt enkelt se detta som ett bevis, skrivet av människor och kontrollerbart av människor. Programmet är inte ett bevis för fyrfärgsproblemet, ty det saknar detaljerna, men det är en bevisstrategi som kan utvecklas och leda till ett bevis. (Jag känner givetvis inte till detaljerna, men man kan fråga sig om ifall det inte ledde till ett bevis, skulle ge ett motexempel, eller helt enkelt fortsätta i all oändlighet). Vad det hela egentligen visade var att människans uppgift inte längre var att presentera bevis utan protobevis (eller vad man nu skall kalla dem). Ett lättfattligt konkret exempel. Säg att vi vill bevisa satsen nedan för lämpligt valda M, N

För varje heltal $n : 2 < n < N$ och heltal x, y, z med $0 < |x|, |y|, |z| < M$ gäller att $x^n + y^n =\cdot z^n$

Vi kan då lätt skriva ett program som systematiskt går igenom alla fyrtuplar (*x, y, z, n*) och kollar om likhet gäller eller inte. Detta skulle i så fall utgöra ett protobevis som skulle kunna avgöra satsens är sann eller inte. Antingen skulle det kunna skriva ut en likhet om den finner en, eller om programmet slutförs utan att något skrivs ut, sluta att satsen är sann. Beviset det då skulle ha presenterat skulle bestå av en lång lista av olikheter som en människa inte skulle kunna hantera, men ändå kunna lita på grund av att protobeviset skulle vara så uppenbart och att man valde att lita på datorns mekaniska (elektroniska?) ofelbarhet. I praktiken skulle även för modesta värden för M, N det ta oerhörd lång tid. (Aritmetiska operationer är hårdvaruimplementerade i datorer men då för ta av ganska modesta storlekar, men man kan lätt programmera operationer på tal med miljontals siffor, dessa kommer att ta tid, och framför allt att gå igenom de alla skulle ta tidsrymder för vilka universums ålder vore helt försumbar). Problemet är känt inom AI som den kombinatoriska explosionen. Problemet inom datologin är att komma upp med betydligt effektivare algoritmer för vad som med ett gemensamt ord kan betecknas med 'sökningar', eller i vårt språk - protobevis. Vi kommer nu till den andra, betydligt allvarligare invändningen mot beviset, nämligen den att beviset gjorde ingen klokare. Vad en matematiker ytterst vill få av ett bevis är inte så mycket säkerhet utan en förståelse. Datorbeviset introducerade inga nya idéer.

Frågan är hur datorn skall användas i matematiken i framtiden. En populär uppfattning har varit, och kanske fortfarande är, att datorer gör matematiken obehövlig, eller åtminstone matematikerna. Datorns intrång beror på vilka delar av matematiken man betraktar. Inom logiken är nyttan ytterst begränsad, även om många dataloger har ett förflutet som just logiker, men de anses speciellt kompetenta att ägna sig åt filosofiska frågor rörande datorprogrammering. Den numeriska analysen ägnar sig åt att finna effektiva algoritmer för numeriska beräkningar som kan implementeras i mjukvara och leda till snabba och precisa simuleringar, som t.ex. i såväl datorgrafik som simuleringar i desamma. Talteoretikerna har länga använt datorer i rent experimentellt syfte för att ge evidens för hypoteser och stimulera till nya; dock det rör sig aldrig om bevis. Inom dynamiska system har datorsimulationen varit oundgänglig genom att kunna iterera avbildningar ett stort antal gånger, och fenomen som 'strange attractors' blev mycket populära på 80-talet, för att inte tala om Mandelbrotmängden. Men återigen det rör sig inte om regelrätta bevis. Så hittills har datorn varit en leksak och ett hjälpmedel, precis som papper och penna var förr i tiden när det gällde att göra beräkningar (Gauss gjorde många i huvudet) och rita illustrerande figurer. Matematiken har betydligt mer med visuell konst att göra än med musik.

Ett matematiskt bevis kan i princip skrivas på ett helt formellt sätt och därmed vara ett föremål för en matematisk analys. Detta var en idé hos Hilbert för att bevisa matematikens fullständighet. Ambitionen har en stor del av självreferens vilket Gödel utnyttjade för att visa det futila i den. Dock i princip skulle man kunna rent mekaniskt kontrollera att ett givet bevis är korrekt. Den framlidne unge ryske matematikern Voedvodsky blev trött på att ständigt finna små misstag i sina låga komplicerade bevis och började utveckla ett ändamålsenligt formellt språk som skulle kunna utgöra en lämplig bas, ett annat försök är Per Martin-Löfs typteori. I princip skulle 'proof-checkers' kunna utvecklas och vissa blygsamma försök har väl redan gjorts; svårigheten är att översätta ett mänskligt bevis till ett formellt språk, då duger inte Google-translate eller liknande algoritmer, ty algoritmen måste kunna utröna författarens intentioner och kan inte ta genvägen genom statistiska överväganden, som Google, på 'big data', och alltså måste det göras för hand, och man är väsentligen tillbaka till ruta ett.

Det är en traditionell uppfattning att bevis kan i princip kontrolleras av datorer, men att finna bevis är en helt annan sak. Man kommer osökt att tänka på den förmodade dikotomin i $P =\cdot NP$. Att checka att en given tupel av heltal är en lösning till en diofantisk ekvation kan i princip göras genom en följd av additioner och multiplikationer (i allmänhet endast i princip eftersom antalet variabler och grader kan vara oerhört höga) men det är en helt annan sak att finna lösningar (ibland kan man, ofta genom mycket enkla övervägande, bevisa att inga lösningar existerar). Men ponera att man skulle kunna göra dramatiska framsteg på artificiellt intelligenta bevis? Om man ser matematik som ett schackspel är analogin med schackprogram som överträffar mänskliga förmågor en uppenbar analogi. De första försöken inom schack gjordes genom att konstruera sökfunktioner som generade träd av möjligheter genom mänskligt schacktänkande, men bara så mycket vidare än vad en mänsklig hjärna skulle kunna hantera. Mänskliga spelare kunde fortfarande hålla maskinerna stången genom att tänka intuitivt strategiskt och därmed befria sig från ett rent mekaniskt tänkande, datorn är ju som vi alla vet mycket dum men i gengäld ihärdig (för vilken dumheten är en förutsättning). I andra generationens programmerande så betraktar man istället att uppfinna nya strategier genom ett evolutionärt förfarande där program testas och modifieras och testas igen. Detta har även visat sig ha slående framgång inom ansiktsigenkänning. De första försöken var att i detalj undersöka hur visuella objekt var konstruerade och därmed fastställa vilka kriterier som skulle gälla för igenkänning; dessa ersattes av evolutionär programmering där kriterierna evolverades fram via hur framgångsrika de var när de testades på ofantliga datamängder. Ingen vet hur de fungerar eller kan förstå kriterierna (men vi förstår inte själva våra egna omedvetna algoritmer för just ansiktsigenkänning). Man skulle kunna tänka sig en liknande utveckling inom matematiken där datorerna utvecklar evolutionärt nya matematiska begrepp och strategier som en mänsklig varelse inte kan förstå. Om detta skulle fungera skulle det helt ta döden på den mänskliga relationen till matematiken och även ge ett bevis för matematikens platonska natur som oberoende av människan.

Fantasier om AI är baserat på en mycket enkel princip, nämligen den positiva återkopplingen, som vi ser den i den exponentiella tillväxten (geometriska i den klassiska malthusianska terminologin) tillämpar inte bara på befolkningstillväxt och välståndsökning ('more is more' i gängse politisk ideologi) utan även på teknologisk tillväxt; ju mer avancerad teknologi, ju mer avancerad infrastruktur, och därmed bättre förutsättningar för nya vetenskapliga och därmed teknologiska framsteg. Argumenten är om något bestickande. Det kritiska begreppet är singulariteten, när människan har lyckats konstruera en intelligens överlägsen sin egen. Vad betyder det att en intelligens är överlägsen en annan? Det är svårt att finna precisa definitioner på intelligens, men å andra sidan kanske det anses vara ett fundamentalt begrepp som inte låter sig fångas i specifika termer utan är djupt förankrad i den mänskliga intuitionen. Vad menas med överlägsen? B är överlägsen A om B kan göra allt A kan, och lite till. Speciellt innebär det att om A kan skapa en sig överlägsen intelligens B, kan även B så göra usw. På detta sätt finner vi en oändlig följd av intelligenser den ena överlägsen den andra. Kommer detta att gå mot oändligheten, eller kommer det att närma sig ett gränsvärde likt ljusets hastighet? Själva argumentet har mycket gemensamt med skolastiskt tänkande och för tankarna till Anselms gudsbevis. Och varför inte även till Hegels världsande som hela tiden förbättrar sig själv. Ja är det inte en gudom vi ser utvecklas, och om något är inte detta en oförblommerad manifestation av intelligensens platonska natur? Nu behöver man inte dra allt detta till sin logiska spets, det är tillräckligt deprimerande ändå genom att det på ett mycket påtagligt sätt marginaliserar människan, precis som även en relativt modest teknologisk utveckling marginaliserar människan.

CU fråga 7: Med tanke på ovan kanske författaren vill kommentera och fördjupa sitt eget bidrag när det gäller matematisk platonism och vad han menar med postmodernism?

UP Svar på CU fråga 7: När det gäller den klassiska platonismen är det två aspekter som man bör hålla i tanken.

- Grottliknelsen
- Platons former

Dessa två är givetvis sammankopplade men det är ändå viktigt att hålla dem separata. Den första är den minst kontroversiella, medan den andra är den mest vulgariserade och mest citerade. Vad jag skall presentera är en modern och personlig tolkning. Jag har under många år gjort upprepade försök att formulera min syn på Platonismen i form av essäer, föreläsningar och bidrag till filosofiska handböcker. Platons essäer utgör ingen helig skrift som man skall ta bokstavligt ty Platons texter utmärks av ironi och den verkliga meningen är i platonsk (!) mening fördold.

Platonismen utgör heller ingen vetenskaplig teori, ej heller ett matematiskt faktum som man kan bevisa (vad skulle man förutsätta?) utan en metafysisk kontemplation som visserligen bygger på argumentation och metaforer, (som aldrig skall tas alltför bokstavligt, då blir de endast löjliga (silly)), men som inte kan bli, i motsats till vetenskapens ’pinned down’, ty om de så görs blir den i bästa fall en vetenskap, och förlorar därmed sin speciella lyster. Metafysikens roll kan illustreras av följande smått banala metafor. Ett spel utgörs av regler och det är underförstått att regler skall följas. Men man kan inte likställa detta med en regel, och därmed inkludera den bland de andra, ty detta vore enbart löjligt.

Grottliknelsen

Platon lär att sinnenas vittnesbörd är bedräglig och att den värld vi upplever med dess hjälp är inte den verkliga världen.

Att söka förklaringar bortom det uppenbara är den bärande principen i all sann vetenskap, och har nått sitt mest spektakulära uttryck i de fysikaliska vetenskaperna. De förklarande modellerna inom fysiken är mer skilda från den naiva verklighet de är satta att förklara än inom någon annan vetenskap. Ja hela den västerländska vetenskapliga traditionen (vilken är den enda vetenskapliga traditionen om man skall vara ärlig) är en illustration av denna platonska princip. Alltifrån den heliocentriska världsbilden, via Newtons gravitationsteori, den moderna atomteorin, elektrodynamiken, till relativitetsteorin och kvantfysiken.

Även matematiken uppvisar denna övergripande tendens; ja är inte matematiken själv en värld av vilken vi endast tar del av dess projektioner?

Platons former

Detta är som noterat den mest kontroversiella aspekten av platonismen och som är intimt förknippad med grottliknelsen, men som gör den mycket specifik och därmed sårbarare för kritik. Istället för att måla upp en hel serie av djupare och sannare verkligheter postulerar den endast två - nämligen den skenbara och den verkliga.

Tanken att den sinnliga värld vi lever i inte är den riktiga världen, har om något religiösa övertoner, och neoplatonismen hade ett stort inflytande på den tidiga kristna läran; men som Russell beklagar i sin Västerländska Filosofihistoria, de medeltida skolastikerna påverkades mer av Aristoteles än av Platon. Ett direkt platonskt inflytande tycks saknas inom Islam, men däremot Hinduismen med alla sina lager av meningar (även ateismen är en del av hinduismen) tycks förekomma mycket av platonismen, åtminstone via en välvillig tolkning. Men den utpräglade abstrakta teologin är så abstrakt att den inte utgör något hinder för traditionell vetenskaplig verksamhet, så denna koppling har inga betydande konsekvenser. Om man ändå tycker att platonismen ansluter sig väl mycket till traditionell religion, speciellt kristlig sådan, kan man bara hänvisa till tyska 1800-tals teologer som med sin bibliska källkritik avslöjade vad som egentligen låg bakom dessa uppfattningar.

Till varje objekt i den sinnliga världen kan vi ordna ett ideellt objekt i den verkliga världen, av vilken det sinnliga objektet endast är en blek avbild. Man talar om 'formen', och speciellt har stolen sin form, liksom bordet, kniven, hästen o.s.v. Man tänker sig att av alla möjliga stolar finns det en unik representant som utgör den fulländade formen av en stol, och alla andra stolar är bara en degenererad form av en denna fulländade stol. Ja allting i sinnevärlden delas upp i ekvivalensklasser vilka var och en representeras av dess platonska form. En abstrakt metafysisk uppenbarelse reduceras till en kvasivetenskaplig teori, som kan utsättas för kritisk granskning. Man kan se det som om Platonismen i Platons framställning endast är en sinnlig version och därmed en degraderad sådan. Att vara bokstavstrogen platonist blir därmed om något löjligt, och man kan undra till vilken grad Platon var ironisk när han nedtecknade dessa fantasier. Den matematiske platonisten bekymrar sig inte över stolens form, ej heller hammarens, gräshoppans, eller skorstenens, men däremot över matematiska begreppens existens. Den aspekt vi skall närmare utröna är matematikens ontologi.

Matematikens ontologi

Vad är en rät linje? Kan denna överhuvudtaget existera i sinnevärlden? De så kallade räta linjer vi drar i sanden eller med gnisslande krita på den svarta tavlan, är patetiska approximationer, små knubbiga stumpar som varken är räta eller saknar tjocklek. Men ändå tycks vi veta vad vi vill göra, det finns tydligen något som en rät linje även om den inte kan fysiskt manifesteras. De räta linjer vi kan presentera i de fysiska ljusstrålarna tycks vara den bästa manifestation vi är mäktiga. Den matematiska räta linjen är således inte något fysiskt objekt bland andra liknande fysiska objekt, utan inkarnationen av den räta linjen och således ett objekt som existerar i en annan verklighet, om vi nu betraktar saker och ting bildligt utan att för den skull nödvändigtvis bokstavligt. För en 2-dimensionell varelse skulle en kub inte kunna fattas utan endast dess varierande 2-dimensionella projektioner. Den 3-dimensionella kuben vore då den platonska versionen av alla dessa 2-dimensionella projektioner och alltså inte en 'prioriterad' sådan. Den 4-dimensionella kuben existerar inte fysiskt, inte ens som en grov approximation i form av en trådmodell eller en tärning. De åskådliga bilder vi kan göra av den är endast 3-dimensionella projektioner. I vilken mån är den 4-dimensionella kuben ett meningslöst fantasifoster? Till detta skall vi återkomma.

Andra, mer fundamentala exempel på matematiska begrepp utan fysisk representation är oändligheten (för att inte tala om överuppräkneliga oändligheter). Så den naturliga frågan är vad är det som utmärker fysiska objekt och varför anses endast dessa vara riktigt verkliga, allt annat endast flyktiga skuggor. Och vad är fysiska objekt, och hur känner vi igen dem, och kan de separeras från våra föreställningar om dem, och i vilken mån är våra spontana lekmannaföreställningar skilda från fysikernas? Dessa är klassiska filosofiska frågor.

Varför är vi i allmänhet övertygade om en extern fysisk verklighet? Vad är det som ger denna en påtaglighet som vi inte kan förneka? Vi upplever som individer verkligheten med alla våra sinnen, synen, hörseln och känseln, och alla dessa tycks bekräfta varandra (visst finns det människor som föds utan syn och hörsel, men de tycks ändå uppleva en påtaglig verklighet, kanske genom känsel, och hunger och värme och kyla). Ja allting i verkligheten hör ihop, allting har konsekvenser som i sin tur har konsekvenser. Om verkliga individer kan man ställa frågor som hårfärgen på specifika anfäder (vid specifika tider må man tillägga), men vad för mening har frågan om Sherlock Holmes morfar var flintskallig? Vem skulle kunna besvara denna med någon form av auktoritet? Var Sokrates en verklig figur eller bara en fiktiv person i Platons dialoger (Sokrates förekommer också i en av Aristofanes pjäser), och vem skrev Platons dialoger egentligen, var det Platon, eller är han också en fiktiv figur (och även Shakespeare?). Ju längre en människa har varit död desto mer av en fiktiv person blir denne, ty de kanaler vi har till förfogande för att känna till saker om denna blir mer och mer begränsade. Om en person som Erik XIV har vi tillgång till hans fysiska kvarlevor och kan både ställa och besvara frågor om honom som inte är tillgängliga i de skriftliga källorna. Ja detta ställer frågan huruvida det förflutna är verkligt, om det är lika verkligt som det närvarande. Dock även om det inte är en värld som vi kan resa till och bevista, inte ens i princip, så känner vi att den har en verklighet oberoende av oss själva. Enligt Collingwood är historien ett fortlöpande försök att återskapa det förflutna in i nuet, inte att förflytta det (som i Prousts minnen), ty dessa försök kan aldrig bli fullständiga, det förflutna tillhör det förflutna och kan endast betraktas, d.v.s. rekonstrueras, med hjälp av de spår det lämnar i nuet. Lämnar varje händelse i det förflutna ett spår i framtiden? Det vill säga injiceras det förflutna in i det närvarande, har varje verkan en unik orsak? Om inte så finns det händelser som kan ha hänt eller inte ha hänt, det gör inte den minsta skillnad; vilket strider mot en djup intuition ty en händelse har antingen hänt eller inte hänt, något annat är svårt att föreställa sig, ty vi har en övertygelse att det förflutna är lika verkligt som det närvarande.

En del filosofer hävdar att matematiken endast existerar i den mån den är direkt kopplad till en påtaglig fysisk verklighet, ett exempel är den numera bortglömde J.S.Mill som hävdade att ett tal endast existerade om det kunde knytas till en konkret mängd av fysiska föremål, såsom marmorkulor eller snäckor eller varför inte sandkorn som i fallet med Arkimedes. Programmerar man kan man definiera en 'array' säg med en miljon 'tomma' platser att fylla ut. Varje sådan plats kan kopplas till en konkret fysisk verklighet, nämligen platser i ett fysiskt minne. En miljon har således en mycket konkret innebörd. Men med dessa array kan man beskriva tal med en miljon siffror, eller för att fixera vår diskussion, en miljon binära siffror. I en array finns det således en miljon platser som antingen är påkopplade eller avkopplade, eller hur nu datorn fungerar fysikaliskt. Varje sådan aktivering, d.v.s. att fylla arrayen med nollor eller ettor, är också detta ett fysikaliskt föremål, lika verkligt som elementet med en miljon platser i datorns arkitektur. Men det absoluta flertalet av dessa otroligt många kombinationer kommer aldrig att manifesteras som fysikaliska objekt, tiden räcker inte till att presentera dem alla. Existerar de då verkligen inte, eller kan vi tala om en värld i vilken de existerar utan att hemfalla åt mysticism? Kan vi ge ett exempel på en sådan kombination som inte kan existera? Man kan presentera kombinationen som sådan, men detta skulle innebära att den existerar! Detta är att, enligt Russell ge ett egennamn. Frågan om Jesus existerade eller inte har två olika responser beroende på om man betraktar Jesus som ett egennamn, då existerar det per definition, eller om man betraktar ’Jesus’ som en beskrivning, bli frågan betydligt mera öppen och kontroversiell. På samma sätt kan man ge beskrivningar på kombinationer och fråga om dessa är möjliga. Alla dessa kombinationer utgör en mycket stor (men ändlig) mängd i vilken mening kan man tala om att denna mängd finns eller inte? Den kan uppenbarligen inte realiseras fysiskt men kan man ändå tala om existens i någon icke mystisk mening? Klassiskt talar man om potentiell existens. Man kan tala om kardinaliteten av en sådan mängd och uttrycka den relativt enkelt även med konventionella siffror (trivialt binärt men enahanda) men man kan aldrig förvänta sig att implementera en array med så många platser, detta tal kan således inte ges en fysikalisk tolkning `a la Mills. Vi talar här inte om fysikaliskt omöjliga begrepp som räta linjer eller oändliga mängder.

Men låt oss gå in i närmare detalj. Vad är skillnaden mellan en potentiell existens och en verklig, manifesterad? Ett objekt i den fysiska världen blir, som antytts ovan, inte bara ett isolerat objekt, utan ett objekt med relationer till andra fysiska objekt, och beroende av dessa får den sin karaktäristiska ’verklighet’. Att skriva en miljon ettor och nollor i ett kollegieblock är en ganska oskyldig verksamhet, däremot en array med en specifik kombination insatt i ett speciellt datorprogram som är kopplad till en mängd kärnvapenrobotar kan ha en katastrofal konsekvens om detta program körs. Man kan säga att kombinationens potential blir till fullo uppfylld om den sätts i denna situation, den blir verklig på ett mycket påtagligt sätt. (Och dessa fullklottrade kollegieblock gömda i en byrålåda i en bortglömd vind, kan inte desto mindre hamna i orätta händer och bli kopierade i en array strategiskt placerad. Så helt oskyldigt är inte tilltaget!).

Ja man kan konkretisera dessa arrays till böcker som Borges gjorde i sitt Babelska bibliotek (min favorithistoria av Borges). Han gav en explicit definition av en bok, så och så många sidor, så och så många rader på vare sida, och så många olika tecken (inklusive mellanslag). Det är trivialt att ange det exakta antalet böcker i detta ofantliga bibliotek. Vad som fascinerade Borges var att varje tänkbar bok måste vara innehållet i biblioteket. Man kan variera det hela genom att tala om pixlar och betrakta alla möjliga bilder, eller musikalisk med musikalisk notation (Mozart lär ha utropat all musik finns, det gäller bara att skriva ner den). Vad vi har beskrivit är en kodifiering av böcker, bilder, musik (ja rentav biologiska varelser via sina DNA strängar, men notera att även identiska tvillingar sätts oundvikligt i olika sammanhang, dels genom den embryologiska processen, som bland annat ger olika fingeravtryck, dels genom att som färdiga individer ockupera något skilda positioner i den fysiska verkligheten, genetisk determinism är en chimär) i termer av tal. Men nu talar vi om tal såsom strängar utan fysisk mening som kardinaltal av mängder av fysiska objekt. Skillnaden mellan en potentiell sträng i det babelska biblioteket och en fysisk bok som faktiskt läses är enorm. En sträng som sådan är egentligen inte riktigt införlivad i den fysiska verkligheten det blir den först när den är meningsfull och läses av och påverkar en individ, då först får den oförutsägbara (såväl som förutsägbara) konsekvenser. Vad är det som gör att en kodifierad sträng är meningsfull och vad är innebörden av denna ’mening’? Var existerar denna mening? Existerar den i strängen? Men en och samma ’mening’ kan kodifieras med olika strängar, skrivna med olika alfabet och olika språk. Kan vi manifestera en ’mening’ rent fysikaliskt och binda den med ett specifikt fysikaliskt objekt? Nej, själva meningen, kan inte kodifieras, det ingår i ett mycket brett sammanhang, men kan man i princip kodifiera detta sammanhang även om inte i praktiken, bara för att undgå att ge ’mening’ en mystisk existens bortom tid och rum? Själva kodifieringen (eller som fenomenalisterna med Husserl i spetsen kallar ’Fundierung’) kan inte identifieras med vad den försöker kodifiera. Man kan likna den formella strängen med kroppen, medan ’meningen’ utgör ’själen’. En sträng av tecken utan mening är död materia, den ’mening’ den förmedlar är den levande ’själen’ som är oberoende av sin kropp, den kropp som knyter den till verkligheten, är bara en tillfällig sådan, dess ’essens’ ligger bortom denna. Detta skall givetvis tas som en metafor men dock de begrepp som motsatspar mellan ’kropp’ och ’själ’ är i högsta grad meningsfulla, ja rentav rationella. Någon som naivt sätter likhetstecken mellan en ’mening’ och en kodifiering av denna, har missat själva poängen.

Descartes är känd, eller snarare ökänd för sin dualism. Den kartesiska dualismen förtjänar verkligen epitetet ’psykologiskt’ oundviklig men ’intellektuellt’ förkastlig, som matematikern Manin tillskriver matematisk Platonism. Vi upplever den fysiska världen som något externt och oberoende av oss själva, själva essensen av ’objetivitet’, vårt eget medvetande däremot upplevs som ’internt’ och i högsta grad subjektivt. Det är detta som utgör den psykologiska kompulsionen som vi upplever på ett mycket direkt sätt. Det intellektuella problemet är att sammankoppla dessa två parallella verkligheter ty de påverkar uppenbarligen varandra, men hur? Vi har väl alla som barn förvånats över att vi kan röra på tårna. Vi får tanken rör på tårna och vips rör vi på tårna. Hur bär vi oss egentligen åt? Ingen har lärt oss det och varje förklaring i stilen med att för att röra på tårna måste vi göra A. Men hur gör vi A? Enkelt, gör B först. Och förhoppningsvis interagerar vi med den externa världen inte bara genom att röra på tårna och rulla med timmarna. Härvidlag misslyckas Descartes skändligt, ju mindre vi dröjer vid tallkottkörteln desto bättre. Problemet var att Descartes kände sig tvingad att komma upp med en förklaring, vilket kan ses som intellektuell hederlighet och förtjäna respekt. Idealisterna med Berkeley i spetsen gjorde det betydligt lättare för sig genom att förneka en verklighet, den externa, och endast erkänna den interna, den verklighet vi upplever direkt, medan den fysiska vi tolkar. Motsatsen att ge en fysikalisk förklaring till vår subjektiva värld ansågs till ganska nyligen ligga utanför naturvetenskapens domäner, men i och med datorernas utveckling har den frågan fått förnyad aktualitet. Denna uppgift är betydligt svårare än den som förestod Berkeley ty att göra kött av anden lär endast vara ett mirakel, men att göra ande av kött är ett mirakels mirakel. Det externa ligger utanför oss liksom resultaten av de förklaringar vi ger, medan visavi det interna har vi alla direkta uppfattningar och kan lätt förkasta de försök till förklaringar som görs. Till detta kommer vi ha anledning att återkomma. Att hålla de båda verkligheterna åtskilda verkar vara den naturligaste inställningen. Karl Popper går ett steg längre och talar om World1 som den externa verkligheten, World2 som den interna, och slutligen även en World3 av mänskliga skapelser som romaner, vetenskapliga teorier, språk, matematik etc, som sammankopplar den första och andra världen; den första påverkar den andra (som när vi dör), den andra skapar den tredje, som i sin tur påverkar den första världen. Popper hävdar att Platon var den som upptäckte den tredje världen. Således att tala om skilda världar är ett naturligt sätt att hålla sig till verkligheten, som innefattar såväl fysiska som mentala världar där de senare förknippas med fantasier, mindre handfasta än fysiska föremål, men som i högre grad definierar den mänskliga existensen. All mänsklig samvaro och den moraliska uppfattningen av människors inneboende värde, bygger på övertygelsen att varje människa har ett medvetande, eller i gammalt klassisk språkbruk en ’själ’, varelser som vi förmodar saknar detta ser vi som maskiner, rena fysiska varelser utan eget inneboende värde. Descartes ansåg som bekant att djuren var inget annat än sinnrika maskiner, d.v.s. dess ontologi kunde i princip förklaras rent mekaniskt. Att helt anamma åsikten att endast den första världen existerar och att de andra världarna kan härledas från denna, har konsekvenser som de flesta förespråkare inte skulle acceptera i sin roll som människor. Detta behöver inte nödvändigtvis betyda att den är felaktig, bara att motsatsen knappast behöver ses som ett tecken på luddig mysticism. Humanismen som sådan vore omöjlig utan den andra och därmed tredje världen.

Matematikens roll i den Tredje världen

Poppers Tredje Värld innehåller en stor variation, på vad sätt har matematiken en särställning där som kvalificerar den att betecknas som Platonsk? Vad som utmärker verkligheten är dess konsistens, den kan upplevas med många olika sinnen som alla i princip stöder varandra. Visst är detta en psykologisk förklaring, men kan vi ge någon annan förklaring, en rent logisk skulle förveckla oss i cirkelresonemang.

Samma psykologiska förklaring är också tillämpbar på matematiken, men tröskeln här är högre. För matematikern bildar matematiken en väv där alla aspekter är på ett mystiskt sätt sammanlänkade. Kopplingen mellan talteori, speciellt primtalens fördelning, och komplex analys, två områden som inte verkar ha något gemensamt är ett klassiskt exempel, som jag redan berört. Matematikern upplever att han i en mycket direkt mening upptäcker saker och ting. I de flesta sammanhang i livet tvingas man lita på auktoriteter men inte i matematiken (åtminstone om man inte sätter sin ambition att förstå alltför högt). Som skolämne är matematiken det enda ämne i vilket man inte upplever att sanningsbegreppet är något av en konvention och avhängigt av vad läraren förväntar sig.

Nåja, skillnad mellan uppfinning och upptäckt är knappast vattentät. Varje uppfinning har oväntade och oavsiktliga egenskaper, ja dessa oavsiktliga egenskaper utgör ofta basen för nya uppfinningar, detta är basen för ’trial and error’. Och detta fenomen begränsas inte till mänskliga uppfinningar, i en mycket konkret mening kan man hävda att evolutionen ’uppfinner’ organismer. Dessa organismer är som påpekat inte isolerade varelser utan dess egenskaper är inte kodifierade på något sätt, speciellt inte i den genetiska koden, utan framstår först när de placeras i en omgivning, d.v.s. när de blir en del av den ’verkliga’ världen. Exemplen kan mångfaldigas och blir speciellt slående när det rör sig om så kallad konvergent evolution. Ögat hos ryggradsdjur och blötdjur är mycket lika varandra, så när som på en detalj, men ryggradsdjurets öga utvecklades från hjärnan, medan blötdjurets från ett hudveck. Man kan här om något tala om ögats ’form’ som förverkligas på två olika och oberoende sätt i den organiska världen. Detta antar givetvis formen av en digression, men syftet är att belysa att platonska metaforer mycket väl kan belysa biologiska förlopp, annars brukar man förkasta platonismen inom biologin som löjlig eftersom den anses postulera eviga och distinkta former för de olika biologiska arterna när dessa i själva verket är högst föränderliga och saknar klara avgränsningar. I matematiskt språkbruk, arter utgör inte ekvivalensklasser inom världen av organismer.

Vad är en uppfinning? En uppfinning, i sin konkretaste form, är ett fysikaliskt objekt som när man släpper det faller till marken (åtminstone på en himlakropp med tillräckligt stor massa som t.ex. Jorden). Att den faller till marken är en ickeavsiktlig egenskap hos denna (men givetvis inte i detta ytterst förenklade fall en oväntad sådan), men bara för att uppfinningen är mänsklig betyder inte att detta fallande till marken inte är oberoende av uppfinnaren. Det är klart att utan denna uppfinning skulle inte detta specifika objekt ha fallit till marken, men detta att falla till marken är under givna förutsättningar en del av hur tillvaron, d.v.s. verkligheten är beskaffad, och dess inträffande kan ses som ett experiment för att belysa ett mycket allmännare fenomen. (Det påminner mig om en gammal skämtteckning av Albert Engström där en fysiklärare bekänner att det enda experiment han lyckas med i undervisningen är att släppa en krita att falla till marken för att påvisa tyngdlagen).

Ett spel är baserat på regler. Dessa regler är i princip godtyckliga, och är i det fallet en ren uppfinning, men kan även vara följden av specifika avsikter, vilket i praktiken är fallet med de flesta uppfinningar, ty de är avsedda att ha vissa egenskaper för att lösa ett problem i 'verkligheten', och då kan uppfinningen av spelet ses som en aspekt av ett större inneslutande spel. Men när det gäller spel att spelas då är reglerna givna och inte förklarade. Ett klassiskt spel är schack vars regler tycks ganska godtyckliga och det ingår inte i presentationen av schackreglerna än mindre i spelandet att 'förklara' dessa, och frågan är i vilken utsträckning en 'förklaring' av dessa regler skulle vara behjälplig i att spela spelet, speciellt inte om det skulle röra sig om en historisk sådan, även om en sådan skulle ge en antydan om hur reglerna har evolverats. Men däremot givet reglerna kan man utveckla sekundära begrepp och strategiska teorier och litteraturen om denna är speciellt riklig när det gäller schack. I denna process upptäcker man mycket som inte är explicit givna i reglerna. Frågan är om dessa skall ses som oberoende upptäckter eller bara konsekvenser av de godtyckliga reglerna, och speciellt att dessa endast existerar tack vare reglerna, så om dessa inte är gudomligt givna så är heller inte dessa sekundära utvecklingar.

Nu kan matematiken ses som ett spel i och med att man fastställer vissa axiom och deriverar konsekvenser av dessa genom deduktiva resonemang. Man finner härvidlag en stor mängd av, vad man kan kalla sekundära axiom, d.v.s. teorem. En populär uppfattning är att deduktionen skiljer sig från induktionen genom att den förra till skillnad från den senare inte leder till några nya sanningar, allt är i någon mening förborgat i de ursprungliga axiomen. Russells och Wittgensteins uppfattning att matematik är ingenting annat än en räcka av tautologier, är ett uttryck för denna metafysiska sats. Ett tankeexperiment är att man skapar ett Borges babelbibliotek av 'bevis' genom att systematiskt producera alla kombinationer av tecken (ett axiomatiskt system kan formaliseras till ett begränsat alfabet och en strikt syntax både när det gäller vad som skall anses som en välformulerad sträng och mer stringent en korrekt sträng, d.v.s. logiskt uppbyggd) och bland dessa rent mekaniskt sålla ut dem som utgör korrekta bevis av någonting. På sådan sätt kan man producera en oändlig ordnad lista av alla bevisbara teorem även om det vore ganska opraktiskt med tanke på de ofantliga antal det rör sig om. På detta sätt kan man producera sanna satser men man kan inte garantera att man kan besvara satser av typen 'Ä r X sann', d.v.s. finns ett bevis för X i listan (i motsats till 'kan man bevisa X med mindre än en miljard tecken', även om detta tar tid). Genom att formalisera matematiken kan man betrakta den som ett matematiskt begrepp och ställa matematiska frågor om dem, precis som vi skissat upp nu, ett program som initierades av Hilbert. Vad som slår en matematiker är att det matematiska resonemanget är ganska trivialt och begreppen mycket enkla liksom den bakomliggand idén, och som matematik är det knappast speciellt intressant eller djupt. Detta gör det tillgängligt för en ganska bred allmänhet som därmed får en ganska förvrängd bild av vad matematik egentligen är. Gödels bedrift var att dra dessa ganska enkla idéer till sin spets genom att nästan inkludera det matematiska resonemanget om matematiken (d.v.s. metamatematiken in i matematiken) och därmed kunna göra självreferenser som i Cantors diagonalargument eller som i slutsatsen att det måste finns sanningar ty om inte vore satsen det finns inga sanningar (som postmodernisterna hävdar) sann, vilket skulle leda till en motsägelse, och motsägelser existerar inte i verkligheten, liksom inte i konsistenta axiomsystem. Ur detta följer hans ofullständighets sats för konsistenta axiomsystem, som kräver att systemet är tillräckligt kraftfullt för att innehålla (kodifiera) de hela talen. För enkla axiomsystem är det i princip inga problem, ty man kan finna ändliga modeller, och för inkonsistenta kan man bevisa vad som helst. Ett exempel på en sådan sats är att man inte kan bevisa ett sådant kraftfullt axiomsystems konsistens ty det vore ekvivalent med att söka efter en motsägelse i en oändlig lista och kunna sluta att den inte finns (vilket skulle ta oändlig tid).

Nu skall man inte förringa Gödels Teorem ej heller matematiska logikers undersökningar, som kan ses som en form av tillämpad matematik, utan endast dra slutsatsen att deras bemödande inte förmår att fånga matematikens väsen; vi noterar att det matematiska resonemang vi förde ovan med sina precisa tanekexperiment, inte byggde på några formella axiom utan på sunt meningsfullt tänkande liksom i all matematik. Mängdläran kan anses vara matematikens språk. som det kommer i uttryck i Bourbaki (som handlar om strukturer på mängder, som i sin tur kan uttryckas med hjälp av mängder), även, som vi redan påpekat, om den framlidne ryske matematikern Voedvodsky började utveckla ett annat språk, just för att kunna mekaniskt kontrollera logiken i bevis. Och det finns en standardlista av axiom för mängdläran som kan utvidgas med olika postulat för olika specialområden, som Peanos axiom för de naturliga talen, gruppaxiomen etc (vilket kanske snarare kan ses som definitioner); men givet dessa formella axiom utan koppling till den ’verklighet’ den är kopplad till ger ingen hänvisning hur spelet skall spelas, det finns inget begrepp om slutgiltig vinst som i schack.

Matematik är inget spel. Matematiska satser bevisas inte genom blinda sökningar och slumpmässiga manipulationer av symboler, ej heller finner man drag i schack genom uttömmande sökningar av konsekvensträd, bör man kanske tillägga för rättvisans skull. Men den värld matematiken öppnar är betydligt rikare än den värld som schack erbjuder, en värld som inte sträcker sig utanför de sextiofyra svarta och vita rutorna, utan griper in i så många mänskliga verksamheter. Matematiska resultat kan bevisas på så många olika sätt och det är ett mirakel att så olika angreppspunkter leder till samma resultat. Och det är precis detta som ger de matematiska resultaten dess soliditet och övertygelse om dess riktighet. Det är därför Cantors hierarki av de högre kardinaltalen inte inger samma soliditet som klassisk matematik; visserligen är teorin deduktivt oantastbar men det finns endast en väg dit som bygger på samma enkla idé, nämligen Cantors diagonalprincip. Penrose beskriver den som mycket elegant, men beklagar att den ännu inte funnit några tillämpningar. Ett problem med den, som jag ser det, är att det är oklart i vilken mening man kan tolka dess kardinalitetsbegrepp som en påtaglig kardinalitet, ty alla dessa teorier har av nödvändighet uppräkneliga modeller. Högre kardinaltal är logikernas matematik, inte matematikernas. Manin har beskrivit matematikens logiska grundvalar, som uppstod vid sekelskiftet och nådde sin höjdpunkt under 30-talet, som introspektion fascinerad av tankens värld, medan den samtida fysikaliska revolutionen var fokuserad på verkligheten och trots bristen på logisk stringens, enligt hans mening, betydligt mer spännande.

Innan vi går vidare kan det vara lämpligt att närmare påvisa fundamentala skillnader mellan matematik och språk. Språk är uppenbarligen en mänsklig uppfinning och mycket av matematiken är likaledes mänskliga uppfinningar och i bägge fallen rör det sig om historiska tillfälligheter. Vokabulären, liksom grammatiska regler, skiljer sig från språk till språk, liksom konventioner att representera tal, och det vore löjligt att påstå att något av dessa skulle vara platonsk. Konventioner att representera tal utgör knappast matematikens kärna, medan det är svårt att bortse från vikten av vokabulär och grammatiska regler (d.v.s. syntax) när det gäller språk. Ja representationer av tal är således i själva verket inte en del av matematiken utan en del av språket. Det finns två aspekter av språk, nämligen dess tillägnande och dess användande, och uppenbarligen kan man inte dra en skarp gräns mellan dem eftersom det effektivaste sättet att tillägna sig ett språk är att använda det. När det gäller tillägnandet av ett språk skall man skilja mellan den initiala naturliga inlärningen av modersmålet och den sekundära, den senare är representerad av språk såsom skolämne. Såsom skolämne presenteras språket dels som en samling i sig meningslösa ord som man måste memorera och befästa i minnet genom trägen övning, och dels mer eller mindre meningslösa grammatiska regler. I denna process spelar modersmålet en nyckelroll, ja hela språkundervisningen går ut på att relatera det främmande språket till det egna; dels genom att översätta via vokabulärlistan och de grammatiska reglerna och därmed förstå de främmande språkliga uttrycken, som tydligen endast kan förstås efter en översättning; och dels, vilket är betydligt svårare, att översätta från det egna modersmålet till det främmande språket. Detta blir nu till en formell övning där visserligen ordlistan är oumbärlig men där grammatiken nu ställer till problem. Att konstruera en sats blir en intellektuell uppgift på nivån av ett sudoku och har ingenting med språklig användning att göra. För de flesta skolelever blir det ingen större skillnad mellan att studera språk och matematik, där de grammatiska reglerna nu ersätts av regler för att manipulera siffror och algebraiska symboler, i bägge fallen gäller det att underkasta sig från ovan givna regler och gissa sig till vad skolan förväntar sig. I själva verket föreligger en ganska hög korrelation mellan så kallad språklig begåvning och matematisk begåvning, åtminstone i den mån dessa avspeglas av skolbetyg. Denna korrelation blir ännu tydligare när det gäller studiet av döda språk, vilket var kutym i den gamla skolan. Överlappningen mellan Senior Wranglers i Matematik och i Klassiska språk var betydande, och själve Gauss lär under sina tonår övervägt en karriär som filiolog i klassiska språk innan han kom på bättre tankar. Jag fick höra i den gamla realskolan att som matematiker borde tyska med sina stränga och konsekventa regler falla mig på läppen. Jag höll absolut inte med, tanken att ta ut satsdelar innan man öppnade munnen föreföll mig absurd, och däri hade jag otvivelaktligen rätt. Språkundervisning är en fråga om kodifiering och avkodifiering av ordsträngar, men å andra sidan vad är alternativet? Fönstret för den naturliga inlärningen är redan stängd, och de ansatser till så kallade naturmetoder är ganska konstlade. När man behärskar ett språk söker man sällan efter ord och man konstruerar absolut inte meningar i förväg, framför allt är man inte medveten om grammatiska regler, det har man inte tid med. Att (tekniskt) behärska ett språk är en fråga om motorik som att cykla, och det tillägnar man sig endast under lång och intensiv träning helst så tidigt i åldern som möjligt. Förmågan att lära sig tala utan accent lär man förlora i och med pubertetens inträde, och det är en öppen fråga huruvida man som främling kan totalt inhämta det försprång som en modersmålstalare har, den vulgära uppfattningen är att detta inte är möjligt, utan främlingen röjer sig genom små nästan omärkbara misstag, även om denne har ett betydligt större ordförråd och förmåga till mer avancerade och eleganta formuleringar. Ett problem är att den formella grammatiken endast kodifierar de stora huvuddragen i ett språks syntax, det finns subtila betydelseskillnader i ord och idiomatiska sätt att uttrycka sig som en modersmålstalare automatiskt tillägnar sig, men som förblir bortom främlingens kompetens. En norrman jag känner som tekniskt sett har franska som modersmål (d.v.s. hans mamma var fransyska) hade skrivit en del av en fransk text till ett gemensamt arbete med fransmän. Dessa påpekade att texten var helt korrekt, ortografiskt såväl som grammatiskt, men så uttrycker man sig bara inte på franska, den vore opublicerbar. Ett språk kan sägas vara ett exempel på Jungs kollektiva omedvetande, det är inte kanoniskt, men på den individuella nivån kan man inte bryta mot dess oskrivna regler som därmed har en objektivitet, man kan inte uttrycka sig hur man vill, utan att folk i bästa fall höjer på ögonbrynen och i värsta fall inte förstår vad man säger. Språk är en i högsta grad socialt fenomen och kan i princip naturvetenskapligt studeras på neurologisk nivå, även om framstegen denna väg är än så länge mycket modesta. Man hör mycket talas om dikotomin mellan de två hjärnhalvorna, att språk och matematik hör till den vänstra 'logiska' hjärnhalvan, medan det visuella hör till den högra 'kreativa' (eller är det tvärtom?). Mycket av detta är troligen rent dravel, men det indikerar att hos folk i allmänhet jämställs matematik och språk, utan att för den skulle identifieras; dock tycks det finnas en koppling mellan språk och neurologisk arkitektur, i och med att afasi (d.v.s. oförmågan att använda språket automatiskt och omedvetet) hör i hög grad ihop med skador på den vänstra hjärnhalvan, liknande fenomen kan nog även ses när det gäller så kallade 'math skills', men frågan är hur mycket dessa har med matematik att göra. Förmågan att räkna snabbt i huvudet (som med fallet 'idiots savants' i motsats till att lista ut matematiska knep), ha en känsla för storheter eller kunna visualisera intrikata system i 3-dimensioner är förvisso anmärkningsvärda egenskaper, men knappast tillräckliga för en matematisk verksamhet. Begreppet 'dyslexi' d.v.s. en störd läs- och skrivförmåga har säkert en neurologisk bas, men frågan om så kallas 'dyskalkyl' har det är mer kontroversiellt, men om så är fallet kan man undra om det har någon effekt på matematisk förståelse, precis som dyskalkyli inte lär ha någon effekt på den allmänna intelligensen (vad nu denna kan vara).

För att ta ner frågan om Platonism från en metafysisk nivå skulle jag vilja hävda att den matematiska platonismen utmärker sig genom att matematiken kan inte studeras neurologiskt, men det kan däremot språk och andra fenomen i Poppers tredje värld. Språk är inte matematik, och framför allt är inte matematik språk, även om det är en ganska utbredd uppfattning, inte minst bland fysiker (enligt den kände fysikern Tor Ragnar Gerholm, är matematiken inget annat än tautologier och har inget eget innehåll). En del individer tar denna metafor bokstavligt och förordar att elever bör lära sig det matematiska språket, och med detta menar de terminologi. (The stupidity beggars comprehension). Så låt oss avsluta med att göra en jämförelse mellan matematiken och fysiken.

Enligt Kant kan vi inte uppleva das Ding an sich utan bara förnimmelser av den som inte är direkta utan bygger på teorier. Dessa teorier är mänskliga skapelser till skillnad från Das Ding och när det gäller fysiken är våra teorier matematiska och både matematikern och (den teoretiske) fysikern spenderar sina dagar med att göra matematiska manipulationer, det mest drastiska exemplet är strängteorin. Av denna anledning anses matematiken endast vara ett språk och i princip skulle man kunna bedriva fysikalisk teoribildning utan matematik, men hur detta skulle kunna gå till har ingen någon aning om. Det är svårt att tänka sig fysiken utan matematik, medan man i princip kan tänka sig matematik utan fysik (och framför allt matematik utan mängdlära), även om det skulle bli en utarmad matematik. För många elever (och även lärare) är fysik och matematik väsentligen samma sak, och även om detta är något av en vulgäruppfattning, har de båda disciplinerna mycket gemensamma. Ofta citerad är Wigners anmärkning om matematikens oförklarliga effektivitet, men det hela går djupare. Utan matematiken skulle fysiken vara ganska outvecklad, således har många discipliner sökt erhålla vetenskaplig status genom kvantifiering, men det räcker inte bara att sätta siffror på saker och ting, man måste även kunna meningsfullt manipulera dessa siffror matematiskt; således har i de flesta fall dessa tillämpningar utgjort en enkelriktad gata. Ekonomin har dragit nytta av matematiken, så även biologin, men omvändningen gäller inte utan man kan bara tala om parasitism inte en symbios som i fallet med fysiken. En fysikalisk intuition kan vara mycket fruktbar inom matematiken (extremfallet varandes strängteorin som har haft slående tillämpningar inom matematiken men inte i fysiken), men man kan däremot inte tala om den matematiska fruktbarheten hos en ekonomisk eller biologisk intuition.

Att fysiken beskriver verkligheten (Das Ding) i mänskliga termer är en intressant filosofisk fråga som var mycket i ropet i slutet av 1800-talet. Vad är verkligt och vad är bara mänskliga konstruktioner? Fysikern Mach som blev filosof på äldre dagar förnekade existensen av kraft utan såg på den som en konstruktion, och därmed Newtons lag som en definition. Han förnekade vidare atomers existens, och Einstein föreslog som motbevis Browns rörelse. Kraften i motargumentationen låg däri att atomer hade uppstått (bortsett från grekernas rent spekulativa hypotes) i samband med att förklara vissa kemiska reaktioner, men i den brownska rörelsen dyker de även upp som förklaringskälla helt oberoende av det första sammanhanget och dessutom på ett mycket påtagligt sätt. Man kan i detta sammanhang undra hur Avogadro lyckades beräkna detta nummer, på något sätt måste han kunnat 'lägga fingrarna' på enskilda atomer. Första hjälpen ges av Wikipedia, där man upplyses om att Avogadro aldrig bestämde detta tal, utan det gjordes första gången tio år efter hans död av en viss Loschmidt, bättre uppskattningar gjordes av Perrin i början av 1900-talet, man får dock ingen uppfattning om hur dessa experiment gjordes. (Perrin omdefinierade en mol genom att ange ett exakt Avogadrotal - av den rätta storleksordningen). Men däremot beskrivs det enklaste sättet som en följd av Millikans bestämning av en elektrons laddning, då man endast behöver dividera laddningen av en mol av elektroner (Faradys constant) med denna. I gymnasiet fick vi göra en fysiklabb under min fars ledning att just bestämma en elektronladdning. Detta innebar genererandet av små oljedroppar med ett litet antal elektronladdningar vars totala laddning kunde beräknas, sedan var det bara att ta största gemensamma nämnaren av ett antal av dessa. Man kom således ned på elektronnivå (hur man nu kunde veta detta? den största gemensamma nämnaren blev alltid ungefär samma i upprepade försök?). Ett annat fenomen som går ned på atomnivå är spåren i Wilson-kammaren, som utgör gigantiska spår av orsakad kondensation. Einsteins analys av brownsk rörelse kopplad till en mikroskopisk observation borde även det ge en uppskattning av Avogadros tal. Vi ser hur olika fenomen kopplade till atomer kan observeras och som bekräftar varandra, vilket leder till kommentaren tidigare om hur sådana bekräftelser ger en soliditet till våra antaganden. Dock detta betyder inte att vi känner till atomens inre struktur, och att se på dem som partiklar, typ små hårda kulor, är naivt. Det intressanta är att enstaka partiklar av denna storlek kan ge konsekvenser på mänsklig observerbar nivå. En enkel uträkning ger att från en stjärna av sjätte magnituden (d.v.s. knappt synbar) träffas näthinnan av endast sex fotoner per sekund!

För att gå vidare i den instrumentella synen på fysiken kan vi nämna matematikern Pointcaré som hävdade att man inte kan avgöra huruvida rummet är euklidiskt eller ickeeuklidiskt (i motsats till Lobachevsky), det rör sig ytterst om en konvention av vad som skall anses vara en rät linje baserad på vilket är mest ändamålsenligt för beräkningar. Popper fann den extrema formen av instrumentalism något motbjudande. Han påpekade att en sådan försätter oss i samma situation som Berkeleys idealism, med den skillnaden att den senare hade elegantare förklaringar. (Man kan i sammanhanget nämna att Berkeleys kritik av Newtons infinitesimalkalkyl egentligen inte var riktad mot matematiken utan mot sina egna kritiker av hans teologi, genom att visa att den Newtonska kalkylen var baserad på begrepp väl lika undflyende som de teologiska, en attityd som må påminna om min egen kritik av Platonismens kritiker...)

Skillnaden mellan matematiken och fysiken brukar traditionellt beskrivas via kantiska termer såsom analytiska och syntetiska påståenden. Som jag tidigare nämnt upplevde jag som ung den deduktiva presentationen av den euklidiska geometrin som berusande, ty den visade tankens oerhörda makt genom att vara oberoende av externa syntetiska fakta. Över matematiken har man total kontroll (detta är uppenbarligen en stark motivation för blivande matematiker som upplever att matematiken inte krävde något pluggande och utantillärande som i andra skolämnen, det räckte med ett gott förstånd). Ambitionen av en TOE (Theory of Everything) är just att få samma kontroll över fysiken, d.v.s. få en komplett lista över fysikaliska lagar och fenomen, därefter är det bara en fråga om att härleda konsekvenserna. I slutet av 1800-talet misstänkte man att detta var fallet med fysiken, mest känt genom Lord Kelvins förutsägelse att fysiken inte skulle bjuda på några nya överraskningar. Inom ett par år blev han emotsagd.

Das Ding är fysikens platonska väsen, oåtkomligt men något vi kan beskriva med större och större precision och förståelse. Ja hela den subtila fysikaliska världsbilden är intrikat och sammanhängande tack vare att vi kan i någon mening kommunicera med 'Das Ding', endast genom att bjudas motstånd kan fantasin stimuleras, och motståndet består i att de fysikaliska teorierna kan testas (d.v.s. falsifieras) och därmed modifieras och förfinas. Och kommunikationen består i just denna möjlighet. Men man skall ha klart för sig att Naturen (Das Ding) instruerar inte direkt, trots den allmänna uppfattningen som formulerades redan av Bacon, den kan endast säga ja eller nej till omsorgsfullt formulerade frågor vi ställer upp baserade på våra teorier.

Vad är matematikens 'Das Ding' ? Ä r det samma sak som matematiken? Vi har redan på ett tidigt stadium fastställt att kärnan i den matematiska platonismen är att matematiken utvecklas och därmed ger en djupare och djupare förståelse över vad som ligger bakom det hela. Det är så man skall förstå motivationen för övergripande teorier, som Grothendicks abstrakta teori för schemata, men man skall samtidigt akta sig för att se abstraktionen som ett självändamål inom matematiken, kriteriet för värdet hos abstrakta teorier ligger i hur väl de löser och belyser klassiska konkreta problem (men nu avlägsnar vi oss från en diskussion om matematisk platonism och närmar oss en diskussion om hur människan upplever matematiken individuellt och socialt). ¬Betraktar man matematikhistorien framstår matematiken inte bara rent analytiskt men även syntetiskt, vilket är den mest fascinerande aspekten. Matematik är inte bara logiska slutledningar men än mera begreppsbildningar som revolutionerar disciplinen. Ett lättfattligt exempel är den kartesiska geometrin, som alla bildade människor förr i tiden konfronterades med; ett annat något mera avancerat är teorin för analytiska funktioner som utvecklades under första halvan av 1800-talet, och ger för första gången i en matematikers utbildning en känsla av ren magi. En intressant skillnad mellan fysiken och matematiken är att fenomenen i den förra är mer manifesta än i den senare som kan innehålla många elefanter som ingen ser (åtminstone om man tar en axiomatisk utgångspunkt). Konsekvenserna av Newtons gravitationsteori kan i princip räknas ut, vilket Laplace tog som sin livsuppgift. En mycket subtil konsekvens är tidvattnet och frågan är om en sådan skulle ha observerats på rent analytisk väg givet den matematiska beskrivningen (tidvattenskraften som är derivatan av gravitationskraften med avseende på avstånd är mycket liten men har över tid märkbara konsekvenser, speciellt för strandboende observatörer, tillplattningen vid polerna rör sig om ett par mil, tidvatten ett par meter). Det kan vara så att detta är förklaringen till den fysikaliska intuitionen, man vet vad man kan försumma. Dock om AI skulle lyckas skapa effektiva, ickemänskliga, bevisstrategier, så skulle matematiken upplevas mycket mera syntetisk likt fysiken, obegripliga fakta skulle uppkomma, som vi skulle se som externa fenomen. Och det skulle på ett påtagligt sätt manifestera matematikens platonska natur.

CU Fråga 8: Slutligen, jag kan inte motstå att kommentera författarens påståenden om att om jorden hade befunnit sig i den interstellära rymden så skulle astronomin ha upptagit en position mellan matematiken och de fysikaliska vetenskaperna.

UP Svar på CU fråga 8: Detta är att ta min illustration alltför bokstavligt. Låt gå, med lite huvudräkning och några astronomiska basfakta kan man komma långt. Ljushastigheten är 10’000 gånger högre än Jordens omloppshastighet. Således är ett ljusår cirka 60’000 A.E. Antag att denna sond färdas med flykthastigheten från solen vid jordbanan, denna är ungefär kvadratroten ur två gånger omloppshastigheten, så i runda tal färdas denna 10 A.E. per år. Hur länge har den färdats, säg ett dussin år, och har således hunnit en femhundradel av ett ljusår.

Att mäta ett avstånd på 30’000 ljusår innebär att mäta upp en vinkel på $1 \cdot 10^{-6}$ d.v.s. $6 \cdot 10^{-8}$ radianer, en bågsekund är ungefär $5 \cdot 10^{-15}$ radianer, vi talar således om vinklar av en hundradels bågsekund vilket är ungefär solens skenbara storlek sett från vår närmaste stjärna (vilket man också lätt räknar i huvudet). Och vad jag förstår har man ännu inte lyckats lösa upp en stjärnas skiva i teleskop. Jag säger inte att det vore i princip omöjligt bara att utmaningen för en hypotetisk civilisation skulle vara enorm och motivationen mycket låg. Sedan är det inte klart för mig hur denna sond mäter avstånd (givetvis genom parallax, men hur mäter den upp vinklarna?), kan det tänka sig att den implicit utnyttjar andra fenomen som beror ytterst på närstående objekt? Att mäta en stjärnas absoluta position är mycket svårt utan referenspunkter, som andra stjärnor på himlavalvet. Poängen med mitt tankeexperiment var att presentera en situation där himlavalvets oändliga avstånd vore en naturlig och en svårligen falsifierbar hypotes.

Comte antog givetvis att för att komma åt den kemiska sammansättningen hos en stjärna (inklusive solen för den delen) måste man åka dit på ort och ställe vilket givetvis vore mycket opraktiskt, ty motsatsen skulle vara rena magin. Antag att vi inte desto mindre skulle ha startat ett projekt att ta reda på stjärnors kemiska sammansättning risken är mycket stor att vi inte skulle ha lyckats utan kommit på avvägar. Lösningen på problemet var inte planerat, genom spektrometrin upptäckte man att utstrålningen från gaser uppvisade karaktäristiska band som gav ’fingeravtryck’ och eftersom man fick liknande ’fingeravtryck’ från ljuset hos stjärnor antog man baserat på en metafysisk princip (naturlagarnas giltighet i hela universum) att dessa jordiska ämnen även förekom hos stjärnorna (intressant är att helium upptäcktes först på solen därav namnet). Denna serendipitet är typiskt för vetenskapliga landvinningar. Spektroskopin kan ses som astronomins absolut viktigaste metod vilket knappast är förvånande när allt kommer omkring är vår enda kontakt med dess objekt visuell, d.v.s. via ljuset. Speciellt kan man via spektroskopin mäta radiella (relativa) hastigheter med förvånansvärd precision och det är dessa mätningar som utgör vår enda väg att upptäcka exoplaneter via den ytterst marginella gravitationella inverkan dessa har på sina moderstjärnor. vinklar av en hundradels bågsekund vilket är ungefär solens skenbara storlek sett från vår närmaste stjärna (vilket man också lätt räknar i huvudet). Och vad jag förstår har man ännu inte lyckats lösa upp en stjärnas skiva i teleskop. Jag säger inte att det vore i princip omöjligt bara att utmaningen för en hypotetisk civilisation skulle vara enorm och motivationen mycket låg. Sedan är det inte klart för mig hur denna sond mäter avstånd (givetvis genom parallax, men hur mäter den upp vinklarna?), kan det tänka sig att den implicit utnyttjar andra fenomen som beror ytterst på närstående objekt? Att mäta en stjärnas absoluta position är mycket svårt utan referenspunkter, som andra stjärnor på himlavalvet. Poängen med mitt

tankeexperiment var att presentera en situation där himlavalvets oändliga avstånd vore en naturlig och en svårligen falsifierbar hypotes.

Comte antog givetvis att för att komma åt den kemiska sammansättningen hos en stjärna (inklusive solen för den delen) måste man åka dit på ort och ställe vilket givetvis vore mycket opraktiskt, ty motsatsen skulle vara rena magin. Antag att vi inte desto mindre skulle ha startat ett projekt att ta reda på stjärnors kemiska sammansättning risken är mycket stor att vi inte skulle ha lyckats utan kommit på avvägar. Lösningen på problemet var inte planerat, genom spektrometrin upptäckte man att utstrålningen från gaser uppvisade karaktäristiska band som gav 'fingeravtryck' och eftersom man fick liknande 'fingeravtryck' från ljuset hos stjärnor antog man baserat på en metafysisk princip (naturlagarnas giltighet i hela universum) att dessa jordiska ämnen även förekom hos stjärnorna (intressant är att helium upptäcktes först på solen därav namnet). Denna serendipitet är typiskt för vetenskapliga landvinningar. Spektroskopin kan ses som astronomins absolut viktigaste metod vilket knappast är förvånande när allt kommer omkring är vår enda kontakt med dess objekt visuell, d.v.s. via ljuset. Speciellt kan man via spektroskopin mäta radiella (relativa) hastigheter med förvånansvärd precision och det är dessa mätningar som utgör vår enda väg att upptäcka exoplaneter via den ytterst marginella gravitationella inverkan dessa har på sina moderstjärnor.

Peter Währborg

A. Kommentarer och frågor till Ulf Persson

Bäste Ulf Persson,

Tack för ett glänsande bidrag om än svårtillgängligt för den som saknar utbildning i matematik.

Jag fäster mig vid att du inledningsvis ställer frågorna "är matematiken en vetenskap?", "har den överhuvudtaget något att göra med verkligheten?" osv. Det hade varit intressant att höra dina svar på dessa frågor.

Du knyter an till en fråga som jag tycker är intressant. Frågan om vad matematik egentligen är. Är matematiken ett redskap (metod), men som genom sin expansiva kunskapsutveckling också skapar en egen (metod-) regelbaserad världsbild? Min fråga blir då: Är denna världsbild att betrakta som sann om den inte låter sig motbevisas matematiskt?

Filosofin tycks spela en mycket central roll inom matematiken, t.ex. logiken. Denna koppling har ju förekommit hos t.ex. Bertrand Russell. I dina resonemang kring axiom, postulat och teorem framskymtar dessa filosofiska reflektioner. Jag får dock ingen klar uppfattning om var du står i frågan om matematikens relation till filosofin. Kommentar?

Vilka osäkerhetsfaktorer anser du finns inom den matematiska vetenskapen? Har slumpen någon plats?

Matematiska metoder appliceras stundom för att studera vissa fenomen som t.ex. epidemier, läkemedelseffekter och biverkningar, biologiska förhållanden som t.ex. klimatet eller byggnationer. De studerade variablerna respekterar naturligtvis vissa naturlagar och regelverk, men kan matematiken i sig anses vara en exakt vetenskap?

Inom vilka discipliner anser du att matematiken borde ha en större (eller mindre) plats?

Med vänlig hälsning

Peter Währborg

B. Ulf Persson (UP) svar och svarskommentarer till Peter Währborg (PW)

PW fråga 1: Du knyter an till en fråga som jag tycker är intressant. Frågan om vad matematik egentligen är. Är matematiken ett redskap (metod), men som genom sin expansiva kunskapsutveckling också skapar en egen (metod-) regelbaserad världsbild? Min fråga blir då: Är denna världsbild att betrakta som sann om den inte låter sig motbevisas matematiskt?

UP svar på PW fråga 1: Detta knyter an till frågan huruvida matematiken har en platonsk existens oberoende av människan. Denna kan tolkas på olika sätt, en standardtolkning är att matematiken är sann så länge som den är motsättningsfri (d.v.s. om den inte kan motbevisas matematiskt). Problemet med denna definition är att i intressanta fall kan konsistens inte bevis utan måste vara en trosuppfattning. Men detta gäller i en högre grad vetenskapen i övrigt. Personligen har jag aldrig haft någon större sympati för uppfattningen att matematiken bara är ett språk, eller enbart ett hjälpredskap, vad skulle det i så fall kunna ersättas av, och vad skulle vi kalla detta? Matematik?

PW fråga 2: Filosofin tycks spela en mycket central roll inom matematiken, t.ex. logiken. Denna koppling har ju förekommit hos t.ex. Bertrand Russell. I dina resonemang kring axiom, postulat och teorem framskymtar dessa filosofiska reflektioner. Jag får dock ingen klar uppfattning om var du står i frågan om matematikens relation till filosofin. Kommentar?

UP svar på PW fråga 2: Matematiken spelar en mycket större roll inom filosofin än filosofin gör inom matematiken. En seriös filosof kan inte undvika matematiken, medan en matematiker mycket väl kan vara okunnig om filosofi. Matematikens roll inom filosofin har uppenbarligen att göra med möjligheten av säker kunskap, och också vad är kunskap, och finns det någon kunskap om vad som ligger bortom det mest påtagliga. De tidiga grekiska filosoferna sysslade mycket med matematiska och kosmologiska spekulationer, och Platon formulerade matematiska forskningsprojekt (om himlakropparnas rörelse) och kan anses som något av matematikernas skyddshelgon. Matematiker kan mycket väl ha ett filosofiskt temperament, även om inte alla har det, och liksom många barn kan filosofera vid ung ålder kan de även filosofera över tal, speciellt stora sådana. Den mest direkta inflytandet av filosofin på matematiken är att ge den en logisk underbyggnad som betonar matematikens deduktiva natur. Denna har jag vid ett flertal olika tillfällen liknat vid representationen av bilder med pixlar vilket inte har mycket gemensamt med hur vi upplever eller skapar en bild. Den matematiska filosofen C.S.Peirce hävdade att de hela delen är mera fundamentalt än logiken. Russell et al försökte härleda matematiken ur logiken men råkade i stora svårigheter (Gödel), istället har det visat sig att logiken snarare är en form av tillämpad matematik, och de stora framstegen inom logiken har uppkommit just med att införa matematiska metoder. Som Peirce påpekade, en matematiker behöver inte lära sig någon logik, denna är lika naturlig för denna, som modersmålet vilket behärskas utan formella grammatiska kunskaper.

PW fråga 3: Vilka osäkerhetsfaktorer anser du finns inom den matematiska vetenskapen? Har slumpen någon plats?

UP svar på PW fråga 3: Det är mycket oklart vad som skall menas med slumpen i en sådan precis mening att man kan ge ett meningsfullt svar på en sådan fråga. Intuitivt är något slumpartat om det inte har någon skönjbar struktur. Man kan ge matematiska definitioner på hur slumpartat en sekvens av siffror kan vara genom att uppskatta hur mycket informationen i den kan komprimeras, och en sådan komprimering innebär i praktiken att det finns någon regel som ger siffrorna, en regel som är strikt kortare än sifferföljden själv. Detta synsätt förknippas med den ryske matematikern Kolmogorov. Problemet är att man kan visa att vissa sekvenser inte kan vara slumpmässiga men man kan inte bevisa att dom är det, bara att de flesta sekvenser av nödvändighet måste vara slumpmässiga. Jag skrev för några år sedan en artikel om detta som vände sig till en större läsekrets (Hjärnstorm 134-135; 2019).

Ett annat sätt att tolka frågan, vilket jag misstänker är med i linje med frågeställarens intention, är huruvida matematiska resultat är följden av ett mekaniskt förlopp ('räknande'). Att en matematiker lär sig vissa regler och sedan systematiskt utnyttjar dessa (man resonerar 'matematiskt') och sedan följer resultaten obönhörligt. Visst det finns ett ofrånkomligt element av detta, men matematiker som bara sitter och vevar ses ned på av sina kolleger. Det finns ett stort inslag av det oväntade inom matematisk forskning och lösandet av ett problem är inte givet i förväg utan kräver fantasi och tur och någon instinktiv kunskap som inte kan formuleras i ord, vanligen kallad intuition. Om man så vill kan man kalla detta slump. Men vad som kan tyckas slump behöver inte i efterhand vara oförklarligt. (Att 101,103,107,109 är alla primtal och ligger så nära varandra kan ses som något av en slump, men det har en förklaring: talen är nämligen 3x5x7 +/- 2, +/- 2x2 och lämnas åt läsaren)

PW fråga 4: Matematiska metoder appliceras stundom för att studera vissa fenomen som t.ex. epidemier, läkemedelseffekter och biverkningar, biologiska förhållanden som t.ex. klimatet eller byggnationer. De studerade variablerna respekterar naturligtvis vissa naturlagar och regelverk, men kan matematiken i sig anses vara en exakt vetenskap?

UP svar på PW fråga 4: Matematiken är mer eller mindre per definition en exakt vetenskap, eller i praktiken så exakt som man kan rimligtvis begära. En matematisk tillämpning är av nödvändigheten en approximation, och en sådan kan inte vara exakt, detta är ju hela vitsen med en approximation. Att matematiska tillämpningar inte ät exakta, har inget att göra med matematikens inexakthet utan det inexakta i approximationen.

PW fråga 5: Inom vilka discipliner anser du att matematiken borde ha en större (eller mindre) plats?

UP svar på PW fråga 5: Jag är ganska misstänksam när det gäller matematikens tillämpningar inom humaniora och samhällsvetenskap (inklusive ekonomin även om det är inom ekonomin de flesta människor kommer i kontakt med matematikens tillämpningar, låt vara mycket triviala, nämligen i att räkna pengar). De matematiska tillämpningarna inom fysiken och kemin däremot har varit mycket fruktbara även inom matematiken, detta gäller inte ovanstående discipliner. Biologin intar något av en mellanställning. Matematiska approximationer (modeller) visar sig mycket framgångsrika inom naturvetenskaperna i vilket det föreligger en naturlig kvantifiering, medan det mesta av kvantifieringen inom samhällsvetenskaperna är mycket krystade. Exempelvis den typiska enkätfrågan: hur mycket älskar du dina äkta hälft på en skala 1 till 10?