Per Flensburg

A. Kommentarer och frågor till Ulf Persson

Ulf, din artikel förvånar mig! Helt enkelt för att jag begriper så pass mycket av din matematik som jag gör. Jag har visserligen nästan tre betyg i matematik, men trodde jag hade glömt den mesta matten under de 53 åren som gått sedan jag läste det. Jag har skrivit in en massa kommentarer i din artikel och inser att jag på något vis måste extrahera dem i löpande text. Det kommer här.

På sätt och vis handlar både din och min artikel om att beskriva verkligheten, fast vi närmar oss från helt olika håll. Du utgår från logiken och ett antal axiom och jag utgår från en mänsklig samvaro. Det är därför extra intressant att du kommer fram till att axiomen ytterst är sociala och jag kommer fram till att i en väl sammanhållen församling kan betrakta verkligheten som i princip objektiv och logisk. Ditt sätt koppla logik, matematik och axiom samman med en social verklighet har jag inte sett tidigare. Kanske det säger mer om hur lite jag är beläst. Ännu mer spännande blir det då du hävdar att den logiska grunden för matematiken är moralfilosofiskt. Det resonemanget hade jag gärna sett att du utvidgade.

I mitt ämne, informatik, formaliserar man en arbetsbeskrivning och reducerar därmed arbetet till det som är formaliserbart. Men allt arbete innehåller icke-formaliserbara komponenter så därför misslyckas stort sett alla systemimplementeringar! Så du har alldeles rätt då du säger att de är monstruöst irrelevanta!

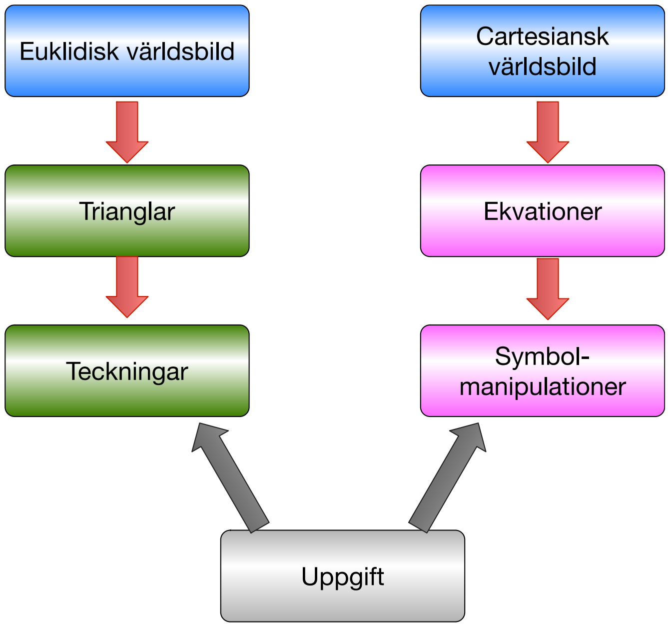
Du skriver: ”Om matematiken kunde reduceras till logiken, skulle detta faktum också reduceras till logiken…” Jag hänger inte med här. Om man reducerar matematiken till logiken så gör man väl det utanför både logiken och matematiken? Det är ju logiskt kan man tänka och så föll fällan igen! Lysande!

Du har sedan ett avsnitt om geometri, som jag bitvis tycker går utanför bokens tema. Projektioner och sfärisk geometri är visserligen intressanta, men vad har de med vetenskapliga metoder att göra? Att matematiken är en metodvetenskap som tillhandahåller analysmetoder åt andra vetenskaper är en helt annan sak. Men i din slutkläm där du menar att matematiken har ett innehåll inte bara är ett formellt spel instämmer jag inte. En del av verkligheten kan beskrivas på ett matematiskt vis, men det innebär inte att matematiken i sig har innehåll, bara att en del av verkligheten är matematisk. Det innebär att matematiken i denna del kan vara användbar.

Du hävdar också att många studenter tror att matematiken är något som uppfunnits av sadistiska lärare. Jag tror det! Sättet på vilket matematik lärs ut (genom nästintill oändligt tragglande) är ett ytterst effektivt sätt att döda allt intresse för matematik!

Din jämförelse mellan Euklides geometri och Descartes analytiska är ett alldeles utmärkt exempel på antologins kärna: Att jämföra olika vetenskapliga metoder

Men dock, har jag problem att placera metoderna på korrekt nivå. Så här tänker jag: Utgångspunkten är en uppgift. Det är inget problem i form av något i verkligheten som behöver belysas eller korrigeras, det är en uppgift i en större uppgift som i regel gäller att underlätta konstruktionen av något, som kan tolkas mycket brett. Kort sagt: Man skapar ett hjälpmedel för att ingå i något annan uppgift.



Om vi nu ser på figuren ovan till vänster har vi två vägar att gå: Den Euklidiska och den Cartesianska. I den ena bygger man på teckningar där utgångspunkten är trianglar och likformighet, i den andra nyttjar man symbolmanipulationer kommande från ekvationer som på ett algebraiskt vis beskriver uppgiften.

Nu är frågan: Är dessa olika vetenskapliga metoder? Exempel på vetenskapliga metoder från mitt område är: Fallstudier, enkäter, aktionsforskning, artefaktkonstruktion, artefaktevaluering, diskursanalys, intervjuteknik etc. Det gemensamma för dem är att används även i andra vetenskaper. Men det två metoder du beskriver är såvitt jag förstår genuint matematiska. De kan tillämpas på många uppgifter, men ingen annan vetenskap skulle se dem som primära metoder för att undersöka de problem man sysslar med. Som beskrivning av matematiska undersökningsmetoder är det en glimrande beskrivning, men som generell vetenskaplig metod är jag mera tveksam. Det leder fram till en diskussion av vad en vetenskaplig metod egentligen är.

Det längre exemplet som följer tycker jag du ska ta bort. Efter 17 sidor gav jag upp att försöka förstå vad du sysslade med. Så det har jag hoppat över!

I nästa avsnitt, om det matematiska landskapet, kommer du inte på väldigt intressanta frågor: Kopplingen mellan verklighet och matematik och förlängning all vetenskap. Om vi nu tänker på en matematiker som sysslar med tillämpad matematik, så associerar vederbörande vissa fysiska fenomen med vissa symboler. Dessutom införs ett axiomsystem i form av föregående forskning som definierar vissa samband mellan dessa fenomen. Vår matematiker överför dessa förhållanden till ekvationer eller möjligen olikheter. Genom att manipulera symbolerna, som representerar verkligheten, kan då den tillämpade matematikern framställa och bevisa teorem som är giltiga under förhållanden att de grundläggande axiomen är korrekta. Men för att teoremet ska säga något om verkligheten krävs ytterligare en sak, nämligen att verkligheten följer logiska lagar! Det är ett antagande jag ställer mig skeptisk till. Men en del av verkligheten kan vara logisk och det är fascinerande hur man med matematiken kan beskriva obegripliga fenomen. Jag har läst att det inom fysiken finns något som kallas Bells bootstrap hypotes, som säger att världen beskrivs utifrån ett antal differentialekvationer och genom att välja lämpliga sådana kan världen se ut hur som helst. Det är enligt denna hypotes fullt möjligt att månen är en grön ost om man väljer lämpliga ekvationer som utgångspunkt.

När det sedan gäller AI är den fruktansvärt överskattad. Och väldigt få verkar inse det. Eller så är jag dum. Jag resonerar så här: Det mesta inom AI bygger på neurala nätverk. Ett neuralt nätverk består av ett antal noder och kopplingar mellan dem. Se figuren till vänster., Det finns två typer av nätverk: Tränade och otränade.

Tränade nätverk tränas upp genom att de matas med kända mätdata och kända svar. Om resultatet skiljer sig från det kända svaret beräknas hur stort felet är och vikterna på ingångarna i varje neuron justeras. Detta förfarande itereras och om nätet är rätt designat (där faktorer såsom val av nätverk, antal neuroner, val av träningsdata spelar en avgörande roll) så konvergerar nätet i riktning mot att ge de önskade svaren. Men: **Detta fungerar bara då det finns entydiga ja/nej svar**. Exempel på sådana neurala nätverk är avstavning och OCR.

Icke tränade nätverk är självlärande system som används till att hitta kända och okända relationer mellan data. Nätverket matas med data men presenteras inget facit. Vikterna justeras exempelvis beroende på om användarna gillar eller inte gillar resultatet, alternativt baserat på om den process som nätverket styr ger ett resultat nära ett börvärde (om tillämpningen är reglerteknik), eller om en optimeringsfunktion ger maximalt eller minimalt resultat (om tillämpningen är ett optimeringsproblem). Träningen avbryts när viktförändringarna för en iteration konvergerat tillräckligt nära noll. Även här baseras processen på entydiga ja/nej svar som i detta fall ges utifrån.

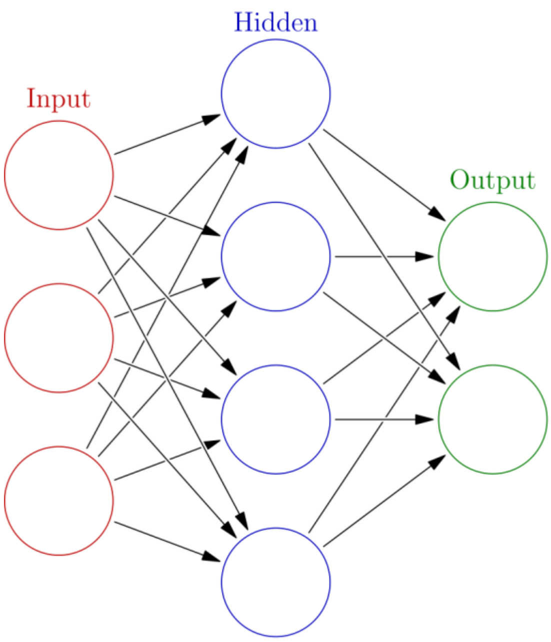
AI baseras i själva verket på ytterst primitiva beräkningar och antagande och framför allt på logik. Mänskliga bedömningar, som spelar stor roll i all offentlig förvaltning kan inte användas för att konstruera AI-stöd. Däremot finns det system som hjälper t.ex. en läkare att ställa diagnos genom att ställa ett antal frågor på olika typer av symptom. Det leder logiskt fram till att patienten har en viss sjukdom, men det finns massor av exempel på att det ändå blir fel. Och det är väl här som slutsats blir uppenbar: Sanningsvärdet för isolerade matematiska fakta är poänglöst, det är hur allt hänger ihop som är intressant.

Några frågor:

Fråga 1. Anser du att verkligheten är logisk? Om så är fallet varför? Om inte, ja varför?

Fråga 2. Om jag minns rätt visar Russell och Whitehead i sin bok: Principia matematica att all matematik baseras på satslogik. Du hävdar motsatsen. Hur hänger detta ihop?

Fråga 3. Vad är dina kommentarer till Bells bootstrap hypotes?



Fråga 4. Gauss lär någon gång ha sagt ungefär att matematiker inte vet vad de gör eftersom matematiken endast sysslar med symbolmanipulering. Du tycks vara av motsatt mening,

Fråga 5. Finns det några generella vetenskapliga metoder inom matematiken?

B. Ulf Persson (UP) svar och svarskommentarer till Per Flensburg (PF)

PF Fråga 1: Anser du att verkligheten är logisk? Om så är fallet varför? Om inte, ja varför?

UP Svar på PF fråga 1: Talar vi om den fysiska verkligheten eller den sociala? När det gäller den senare kan vi verkligen betvivla det. Ett intressant fenomen är de mänskliga språken som visserligen tycks ha en viss underliggande logik, det är så vi 'fattar galoppen' och lär oss språk förvånansvärt lätt, men med en mängd av undantag (som kanske lyder en förborgad logik?). I mänsklig kommunikation är det inte sanningsvärdet som är av intresse, ett vittnesmål kan inte tas ad notam utan måste tolkas, som filosofihistorikern Collingwood påpekar. Det är inte vad som sägs som det är det intressanta utan vad som menas med det. Mänsklig kommunikation går till en stor del ut på att manipulera och vilseleda, därav lögnens centrala betydelse. I humanistisk vetenskap, speciellt historia, är det kännedomen om den 'mänskliga naturen' som ger en mening till det virrvarr av specifika händelser som utgör det förgångna. Vad den mänskliga historien handlar om, i motsats till naturhistorien, är enskilda beslut tagna av så kallade historiska aktörer. Dessa beslut måste förstås och det gör man genom att sätta sig in hur dessa aktörer må ha tänkt. Det är detta som är innebörden i begreppet 'levandegöra historien'. Collingwood talar om att historia är att rekonstruera det förgångna i det närvarande (och historikern John Lukacs talar även i liknande termer) med hjälp av de spår det förgångna har lämnat i nuet. Men för att tolka dessa spår, ja för att överhuvudtaget kunna identifiera de relevanta spåren, måste man ha någon underliggande princip, och denna ges av det mänskliga sociala tänkandet.

I naturvetenskapen däremot finns ingen 'designer' ingen mänsklig natur som ger mening, vad man tvingas förlita sig på är vissa enkla, kalla dem gärna logiska principer. Enkelhet och därtill hörande skönhet är de vägledande principerna för naturvetarens försök att söka den mening, förutan vilken ingenting vore förståeligt. Det är här matematiken kommer in, den som i en trivial mening är skapad av människor, men som ändå tycks ha en oberoende existens, ofta, smått föraktfullt, benämnd platonsk.

Att människan har förmågan att 'förstå' naturen uppfattas av många som oförklarligt och mirakulöst. Speciellt under metafysikens gyllene århundrade (1800-talet) uttryckte många filosofer och vetenskapsmän (gränsen var vid denna tid flytande) sin förundran över detta faktum. Man kan även se den formulerad av C.S.Peirce en anti-metafysiker. I modern tid har Wiegners förundran över matematikens orimliga effektivitet till leda citerats. Principen om det naturliga urvalet är ett lysande exempel på hur en enkel filosofisk princip kan genomsyra en hel vetenskap, i detta fall biologin, och som ofta har påpekats, ingenting i biologin kan 'förstås' utom i ljuset av just denna princip. När jag först kom i kontakt med den (vi talar inte om evolutionen per se, den var redan presenterad av Lamarck på 1700-talet, utan den underliggande mekanismen som inte bara gör den trolig utan rentav oundviklig) förundrades jag över att en sådan enkel och kraftfull idé kunde återfinnas utanför matematiken. Darwin var ingen matematiker (även om han var matematiker nog att som skolpojke fascineras av den euklidiska geometrin) och beklagade ofta sin avsaknad av matematisk begåvning, men den darwinistiska principen är trots detta 'matematisk' till sin natur.

PF Fråga 2: Om jag minns rätt visar Russell och Whitehead i sin bok: Principia Matematica att all matematik baseras på satslogik. Du hävdar motsatsen. Hur hänger detta ihop?

UP Svar på PF fråga 2: Russell och Whitehead visade inte att all matematik kan baseras på satslogik, däremot antog de att matematiken kunde på så sätt baseras och företog sig uppgiften att så en gång för alla att göra med alla detaljer. (Man skall komma ihåg att ur Russells synpunkt var matematiken inget annat än en räcka tautologier, en uppfattning som även Wittgenstein anammade) Detta var en grannlaga uppgift som knäckte de bägge intellektuellt och mentalt. Russell skriver om att verklig mental koncentration är ytterligt plågsamt och kan kanske bara uthärdas under någon minut. De stora andarna är de som lyckas med konststycket under två minuter (jag friserar en aning för dramatisk effekt). Innan var Russell en seriös hårt arbetande filosof med ett gediget rykte, efteråt är man mest känd som pop-filosof med en bred läsekrets. Whitehead var äldre och bleknade bort. Några år senare drev Gödel logiken till sin spets, och nämnde just Principia Matematica i sin titel, och visade ofullständigheten i att kunna reducera matematiken till logik, och därmed slog undan fötterna på matematikern Hilberts ambition att med matematiken kunna bevisa matematikens konsistens. Den grundläggande idén i Gödel går tillbaka till de gamla grekerna och de paradoxer som uppstår i logiken i och med självreferensen. (Russell med sin överskattade paradox, var inte främmande för detta, men kunde bara koncentrera sig en minut i taget).

Varken Russell eller Wittgenstein förstod Gödels bevis. Denne försynte man undrade om de var så korkade, eller bara låtsades så vara. Principia Matematica är en ståtlig katedral dock utan innehåll och står nu övergiven ute på heden endast sporadiskt besökt av vilsegångna turister.

PF Fråga 3: Vad är dina kommentarer till Bells bootstrap hypotes?

UP Svar på PF fråga 3: Jag känner inte till Bells bootstrap hypotes, men jag antar att du menar den nordirländske fysikern John Stewart Bell (1928-90) som är känd för sina intressanta försök till klargörande av vissa kvantfysikaliska paradoxer. Att liknande fenomen som att rationellt kunna förklara och underbygga godtyckliga politiska ideologier är något som flitigt förekommer i den sociala världen är knappast en överraskning för gemene man, men i naturvetenskapen? Kvantfysikens underbyggnad är visserligen matematiskt sofistikerad men inte begreppsmässigt förstådd. Att harmonisera den allmänna relativitetsteorin med kvantfysiken, de två stora genombrotten i fysiken under 1900-talet, utgör fortfarande en stor utmaning. Vad denna bootstrap hypotes illustrerar är fåfängligheten att försöka axiomatiskt grundfästa fysiken. Newton försökte så göra i sin Principia, men fysiker har ignorerat detta, även om Newton hade en mycket enklare uppgift (och Arkimedes var en föregångare). Försök att lägga kvantfysiken på en axiomatisk grund har inte visat sig vara fruktbart. Jag kan mycket väl tänka mig att Bell med sin hypotes medvetet försökte förlöjliga sådana försök, som jag redan försiktigt antytt. Fysiker handskas med matematiken på ett för matematiker ofta hårresande sätt, men de lyckas i allmänhet, vilket får matematiker att avundsjukt undra om dessa besitter en för matematiker otillgänglig intuition. Den matematiska logikens revolutioner under tidigt 1900-tal har en hel del gemensamt i sinnelag med den kvantfysiska revolutionen under samma tid, vilket ovanstående diskussion indikerar. Den ryska matematikern Yuri Manin har uttryckt det så, att den matematisk-logiska revolutionen var introvert till sin natur och sysslade med det mänskliga tänkandet, medan den kvantfysiska var extrovert och var riktad mot verkligheten. Av de två gav den senare den mest hisnande berg-och-dalbane-upplevelsen.

PF Fråga 4: Gauss lär någon gång ha sagt ungefär att matematiker inte vet vad de gör eftersom matematiken endast sysslar med symbolmanipulering. Du tycks vara av motsatt mening,

UP Svar på PF fråga 4: Vad är källan till detta minst sagt absurda påstående? Jag har aldrig träffat på det tidigare och det går stick i stäv med vad vi vet om Gauss och vad vi kan lära oss av hans matematiska gärning, inte bara hans resultat utan även hans sätt att resonera. Gauss anses av många som den mest framstående matematikern i modern tid, vilket betyder någonsin. Symbolmanipulering indikerar ett mekaniskt synsätt på det matematiska hantverket som vore främmande för en sådan ande. Gauss lär ha yttrat en gång angående ett matematiskt genombrott att ett sådant inte berodde på 'notation' utan 'notion' d.v.s. matematiska idéer. Vad som kan vara ursprunget till ett sådant yttrande är att Gauss utförde under sitt liv många rutinberäkningar, speciellt i hans arbeten om himmelsmekanik. Det var Gauss som lyckades beräkna den nyupptäckta planeten Ceres bana ur de knapphändiga observationer som hade gjorts i början av året 1801 (den upptäcktes på det 19-århundratets första dag) innan den tappades bort. Efter denna bedrift (som blev Gauss vida känd, och den grundlade hans professionella intresse för astronomin. Han ödslade dock en stor del av sin dyrbara tid med just beräkningar, och i hans dagböcker kan man finna formuleringar om att döden vore honom kärare än ett liv som detta. Senare skulle han även ödsla sin tid med rutinartade uppgifter inom lantmäteri (praktisk geodesi) även om han revolutionerade även detta gebiet och det gav upphov till banbrytande insikter om ytors inneboende geometri (gaussisk krökning etc). Till en viss del fann Gauss ett nöje i beräkningar och vad som intresserade honom var genvägar och nya sätt att utföra det rent mekaniska. Euler, en annan av den moderna matematikens giganter, sysslade även han med numeriska beräkningar men utan ägna det det sidointresse som Gauss briljerade med. Vilket föranledde Gauss till den sarkastiska kommentaren: inte undra på att han blev blind (vilket skall tolkas bokstavligt). För Gauss var inte matematiken ett formellt spel utan han kombinerade den med en enastående geometrisk och fysikalisk intuition (och hans mest betydande fysikaliska arbeten var inom magnetismen tillsammans med fysikern Weber)

PF Fråga 5: Finns det några generella vetenskapliga metoder inom matematiken?

UP Svar på PF fråga 5: Vad menas egentligen med en generell vetenskaplig metod? Vetenskapliga metoder är domänspecifika, och att tala om sådana i en vidare mening är knappast fruktbart utom rent filosofiskt. Vi har t.ex. Poppers falsifiering som i sin generalitet blir närmast tautologisk men får ett innehåll först när den kontrasteras mot Francis Bacons princip om den förutsättningslösa observationen (något som föresvävar de flesta människor (och politikers) naiva uppfattning om vetenskaplighet) [1]. William James i sin klassiska 'Principles of Psychology' talar om hemligheten att lösa att problem består i att skala bort all onödig information (en variant av abstraktionsprincipen) vilket är en elegant formulering, men knappast av någon större hjälp i en konkret situation. Som tonåring formulerade jag en allmän metod i matematiken, nämligen att uttrycka en sak på två olika sätt och dra slutsatser ur likheten. Detta reflekterade givetvis min något omogna attityd till matematiken som formel-

[1] S.O.Hansson, liksom många filosofer och vetenskapsmän, tar falsifiering bokstavligen som en konkret vetenskaplig metod och visade i en artikel i Foundations of Science att vetenskapsmän i allmänhet inte nyttjar denna genom att ta upp en varierad skara av vetenskapliga artiklar för granskning (liknande kritik anfördes av Martin Gardner [privat brevväxling]). Jag bemötte detta senare i en artikel i samma tidskrift i vilken jag försökte påpeka att detta var en missuppfattning och att falsifieringsprincipen skulle istället ses som en meta-metod. Syftet med denna formulerade princip var inte att ge en metod att bedriva vetenskap utan ge ett kriterium med vilket man kunde avskilja pseudo-vetenskap från verklig.

manipulering ur vilken resultat mirakulöst hoppade ur som kaniner ur en hatt, dock måste jag tillstå att observationen inte var helt grundlös och att det utnyttjas dagligen, även, om jag mins rätt, i mitt kapitel om matematiska metoder

Popper ansåg att matematiken inte var en vetenskap ty den hade genom sin deduktiva underbyggnad en soliditet som vetenskapen inte besatt. Matematikens sanningar är som sagt vad eviga och inte provisoriska. Må vara sant, men matematiken bedrivs av människor och bevis kan vara felaktiga, vilket först senare ådagalägges. Om man något förenklat ser på matematiken som ett axiomsystem vars konsekvenser skall utforskas kan man se varje bevis som ett falsifieringsförsök för hypotesen att detta system är motsägelsefritt. Motsägelsefrihet är endast något vi tillsvidare kan antaga.

Falsifieringstänkandet är en naturlig reaktion som förelåg långt innan Popper. Vi finner det som övligt redan hos de gamla grekerna. Det indirekta beviset, d.v.s. att man förutsätter något som skall visa sig falskt, utgör om något en falsifiering av det förutsatta. En matematiker som upptäcker något förbluffande undrar givetvis om detta kan vara sant. Vad denne gör är inte att återigen syna sin argumentation i sömmarna utan att härleda konsekvenser av upptäckten. Kan denna upptäckt verkligen stämma? Dessa konsekvenser kan vara av olika art, ibland rent numeriska. Om motsägelser uppkommer vet man att argumentationen var felaktig utan att ens veta vari i detta består (detta förutsatt att matematiken är konsistent, vilket i praktiken är en trosföreställning, tills den visar sig ohållbar). Om däremot konsekvenserna passar väl in i sammanhanget eller t.o.m. ger bekräftande förklaringar, utgör detta en mycket stark indikation på att det stämmer, betydligt starkare än att syna argumentationen i sömmarna, ty man kan ha gjort ett försåtligt misstag för vilket man är helt blind, och endast genom en oberoende kontroll kan man bli varse det [2.] Även i vardagslivet förekommer samma tänkande och kontrollerande.

Jag befarar att mycket närmare kan man inte komma en gemensam vetenskaplig metod, eller skall man snarare säga attityd. Utan den principiella möjligheten att kunna göra en falsifiering kan man inte bedriva vetenskap, utan en möjlighet till falsifiering skulle allt i princip kunna vara sant och vetenskapen utmärks just genom sin diskriminering, ofta är det negativa resultatet, d.v.s. att något inte kan vara sant, det som är av intresse. Genom att kunna såga av potentiella grenar av det möjliga, kan man koncentrera det möjliga och därmed kunna penetrera djupare in i det okända, som den ofta citerade vetenskapsfilosofen Thomas Kuhn har observerat.

[2] Ett trivalt exempel utgör en beräkning av en numerisk summa av ett antal termer för hand. Har man gjort rätt? Det är lönlöst att göra om samma beräkning om och om igen, man kommer bara att gå i samma spår; då är det bättre att summera termerna i en helt annan ordning. Om man då får samma svar kan man vara betydligt säkrare på sin sak. Detta är ett vardagsexempel på ett falsifieringstänkande.