Anders Gustavsson

A. Kommentarer och frågor till Ulf Persson

När jag valde bort matematik som fördjupningsämne, som lärare uppmanade mig att fortsätta med, berodde det på att jag upplevde ämnet dött och utan relation till människor.

1) Min första fråga blir: Har matematikämnet något med människor att göra, som är fokus inom mitt ämnesområde humaniora, eller rör det sig enbart om torra siffror och streck som relateras till varandra?

2) Är matematikern den objektive forskaren, som tidigare var målet inom humaniora, eller finns det något subjektivt drag inom dennes vetenskapliga verksamhet?

3) Hur är det egentligen med axiomen? Hur har de uppstått och är de antaganden i stället för evigt gällande orubbliga sanningar?

4) Är vetenskaplig sanning det primära målet inom matematiken? Har frågan om sannolikhet någon plats? Hur kan verifiering/bevisföring ifrågasättas?

5) Vad kan matematisk metod ha att lära till andra vetenskapliga discipliner inom andra fakultetsområden?

B. Ulf Persson (UP) svar och svarskommentarer till Anders Gustavsson (AG)

AG Fråga 1: Min första fråga blir: Har matematikämnet något med människor att göra, som är fokus inom mitt ämnesområde humaniora, eller rör det sig enbart om torra siffror och streck som relateras till varandra?

UP Svar på AG fråga 1: Har konst något med människor att göra, eller rör det sig enbart om våta färgpigment? Har poesi något med människor att göra eller rör det sig enbart om svarta bokstäver och mellanrum?

Matematik bedrivs av människor och har således en hel del att göra med människor. Vissa hävdar att matematik är en helt mänsklig konstruktion jag håller inte med utan bekänner mig till matematisk platonism. En bild jag skulle vilja framhålla är konstnären som målar av ett landskap. Landskapet finns utanför konstnären och är helt fristående från denne, men målningen funnes inte utan landskapet. Målningen är en tolkning av landskapet, en mänsklig konstruktion, och är således inte oberoende av detta som istället inför restriktioner på hur målningen kan se ut. Konstnärens utmaning är att med fantasins hjälp bemästra de restriktioner under vilken han verkar.

Platon kan ses som matematikernas skyddshelgon utan att vara matematiker själv. Matematiken utgjorde för Platon ett ideal och har alltsedan dess utgjort en omistlig del av den seriösa västerländska filosofin.

AG Fråga 2: Är matematikern den objektive forskaren, som tidigare var målet inom humaniora, eller finns det något subjektivt drag inom dennes vetenskapliga verksamhet?

UP Svar på AG fråga 2: Objektiviteten är ett ideal och ingen mänsklig verksamhet kommer närmare detta ideal än matematiken. Men det subjektiva inslaget i matematiken är ofrånkomligt ty att bedriva matematik är en mänsklig verksamhet. Vad är fult och vad är viktigt och intressant inom matematiken kan givetvis inte behandlas matematiskt. Man kan inte ge ett matematiskt bevis för att ett visst bevis är vackert eller att ett begrepp är intressant. Matematikern drivs av en passion, inte bara för att finna det sanna utan även det vackra och det förklarande, men det är viktigt att vad han finner är sant och därmed besitter en objektiv existens. Det finns ingen universell metod att lösa matematiska problem utan matematikern är hänvisad till sin erfarenhet, sin fantasi och sin intuition, vilka alla är av subjektiv natur. Matematikerns yttersta ambition är att förstå och förståelse är om något ett subjektivt fenomen.

AG Fråga 3: Hur är det egentligen med axiomen? Hur har de uppstått och är de antaganden i stället för evigt gällande orubbliga sanningar?

UP Svar på AG fråga 3: Ursprungligen var de menade som evigt gällande sanningar, sedan sågs de som i princip godtyckliga antaganden. Det kan synas vara en himmelsvid skillnad mellan dessa två synsätt, men för att förstå det på rätt sätt måste vi vara klara med att grekerna gjorde en åtskillnad mellan axiom och postulat. Axiomen hade att göra med korrekta sätt att logiskt argumentera, medan postulaten hade med studieobjekten att göra. Som axiom kan vi ta som exempel 'om lika läggas till lika förblir de lika', som postulat kan vi anföra 'genom två distinkta punkter går det en och endast en linje'. Axiomen har således med vårt eget resonerande att göra, medan postulaten har att göra med egenskaper hos det vi studerar. Grekerna ansåg att de geometriska postulaten var så fundamentala ate inte kunde betvivlas, de ansågs vara eviga sanningar. Vi kan säga att de gamla grekerna intog en fundamentalistisk moralisk hållning. Ett av postulaten, som i modern formulering lyder 'genom en punkt utanför en given linje kan en och endast en linje parallell med den givna dragas'. Visserligen betvivlades detta inte, men det ansågs inte vara så uppenbart enkelt och otvivelaktigt sant att det kunde tjäna som ett postulat utan ansågs vara en sats som följde av de andra postulaten genom ett korrekt resonerande. Ett sätt att försöka bevisa det vore att antaga motsatsen d.v.s. att antaga att det var falskt, detta kunde göras på två sätt, antingen att antaga att ingen parallell linje fanns (för någon punkt) eller att det fanns mer än en. På detta sätt kunde man visa att den uppkomna geometrin helt enkelt var bisarr. Men att vara bisarr är inte samma sak som att vara felaktig. Detta insågs oberoende av varandra av Gauss, Bolyay och Lobachevsky i början av 1800-talet, och man utvecklade två alternativa geometrier den elliptiska (väsentligen den sfäriska, som grekerna faktiskt vad bekanta med, detta kan synas paradoxalt, men jag har inte utrymme att utveckla detta) och den hyperboliska. Man insåg nu att man i princip kunde välja postulaten som man ville huvudsaken var att de inte var logiskt motstridande (vilket däremot är en mycket delikat fråga). Däremot kan man inte hur som helst modifiera vårt sätt att resonera, detta är 'hårdvirat'. Sättet att resonera formulerades inte utförligt av Euklides, så begreppet 'axiom' kom istället att beteckna postulaten. Den euklidiska geometrin är inte given av gud utan den är vårt eget verk definierad av de antaganden vi gör. Det är meningslöst att tala om huruvida reglerna i schack är sanna eller falska, schack är definierat av sina regler, men givet reglerna kan vi avgöra om det spelas korrekt eller inte. Vidare kan vi hitta på så många spel vi vill, men det är långt ifrån säkert att alla spel kommer att vara intressanta. Huruvida ett axiom-system är intressant eller ens konsistent är en fråga som ligger bortom vårt godtycke. Den tyske matematikern Hilbert som gick i bräschen för att förklara hur axiomen i viss mening utgör spel (och därmed fick ett oförtjänt rykte om att vara formalist) ville att man matematiskt skulle kunna visa att de traditionella axiomsystemen var konsistens, vilket kan ses som en moralisk ambition. Gödel visade dock att denna ambition kunde inte förverkligas i de verkligt intressanta fallen genom att följa i Hilberts fotspår och istället för att försöka reducera matematiken till logiken, undersöka logiken matematiskt. Detta ledde till ett stort genombrott och har, något paradoxalt, haft mycket litet inverkan på matematiken. Vad vi bevittnar härvidlag är något mycket mystiskt. Matematiken transcenderar den torra logiken.

AG Fråga 4: Är vetenskaplig sanning det primära målet inom matematiken? Har frågan om sannolikhet någon plats? Hur kan verifiering/bevisföring ifrågasättas?

UP Svar på AG fråga 4: Nej, den vetenskapliga sanningen är inte det primära målet för matematiker (matematiken själv har inga mål) dock sanningen är en nödvändighet. Det är sanningskravet som driver matematiken, liksom i all vetenskaplig verksamhet, fantasier kan inte existera i ett tomrum utan får form och mening först genom att konfronteras med en objektiv verklighet. I matematiken konfronteras vi med detta i den mest renodlade formen.

Sannolikheten tar givetvis plats inom matematiken i form av sannolikhetsläran som utgör en matematisk disciplin i vilken man söker finna sanna påståenden om sannolikhet, inte bara sannolika! Men detta var knappast frågan. Viss sannolikhet förekommer inom matematiken i form av hypoteser eller förmodanden. I begreppet matematisk förståelse ingår en känsla för vad som kan vara sant och rimligt i matematiken, utan en sådan skulle det inte finnas någon form av intuition. Men i matematiken kan man tillåta sig göra en distinktion mellan vad som rigoröst bevisats och vad som är förmodanden, inom andra vetenskaper kan man inte tillåta sig den lyxen alla påståenden är provisoriska (jag kan bara hänvisa till Poppers falsifierbarhet).

Men även inom matematiken råder denna metafysiska osäkerhet. Man kan inte bevisa att ett bevis är korrekt, men däremot motbevisa dess förmenta korrekthet genom att ge ett motexempel. Övertygelsen om ett bevis korrekthet får man dels genom att granska dess logiska uppbyggnad och dels genom att inte finna några motexempel, precis som i vetenskapen (men kanske motexempel kan dyka upp senare?). Standarden för vad som skall utgöra ett rigoröst bevis har utvecklats över tid, men det är värt att notera att Arkimedes krav på rigorös bevisföring var mer avancerad än den vad den matematiska kulturen på 1600- och 1700-talet ansåg. Euklides satser står sig än idag och konsensus inom matematiken om vad som är sant eller inte är frapperande jämfört med andra vetenskaper.

AG Fråga 5: Vad kan matematisk metod ha att lära till andra vetenskapliga discipliner inom andra fakultetsområden?

UP Svar på AG fråga 5: Den matematiska deduktiva metoden har traditionellt varit ett rättesnöre för all annan vetenskap. Det har att göra med precisa definitioner (jmfr Descartes och precisa och klara begrepp) logiskt tänkande och givetvis att kunna göra en distinktion mellan det sanna, och det enbart sannolika, för att inte tala om det falska. Man skall heller inte förglömma teoribildningen inom alla vetenskaper som är inspirerad av matematikens rent mentala konstruktioner. Däremot när det kommer till mer handfasta metoder är det tyvärr så att vad de flesta människor tänker på i samband med matematiken är siffror (torra eller inte) och därmed har matematiken identifierats med det kvantitativa. Denna ambition har speciellt varit tydlig inom samhällsvetenskaperna med ekonomin som det mest sofistikerade exemplet. Det grundläggande problemet är att kunna avgöra vilka kvantiteter som är meningsfulla och därmed lämpade för matematisk manipulation. Det är värt att notera att icke-matematiker tar siffror på mycket större allvar än matematikerna själva, ty bara att sätta en siffra på någonting anses som något objektivt och oemotsägligt.