Ulf Persson

Inledning

Är matematik en vetenskap? Har den överhuvudtaget något att göra med verkligheten? Eller utgör den endast ett hjärnspöke? Ingenting är mera obeständigt än vad vi endast föreställer oss i vår fantasi; men ändock är det inget som vi har en mer intim relation med än vår tankevärld, vilket får oss att påminnas om Descartes välkända aforism. Föreställningsvärlden skall naturligtvis tas i sin vidaste betydelse, inte bara den visuella, även om den visuella metaforen är den mest slående för att beskriva tänkandet och förståelsen. Kan du bokstavligen föreställa dig en polygon med tusen sidor (för att än en gång åberopa Descartes), och på samma sätt som man när man blundar kan se framför sig en triangel eller en kvadrat. Jag misstänker att de flesta läsare skulle ha stora svårigheter med att se en regelbunden heptagon (i motsats till en hexagon eller octagon), men kan vi föreställa oss att inte ögonblickligen känna igen en triangel eller kvadrat? Emellertid har vi inga svårigheter att föreställa oss att sådana objekt, som tusensidiga polygoner, existerar, och vi kan i själva verket ställa och besvara ett otal frågor om dem, och ej heller skulle vi möta oöverstigliga hinder i att förfärdiga fysiskt existerande representationer av dessa objekt, baserade på vår förmåga att föreställa oss att de existerar. Helt apropå, vår förmåga att med ett ögonkast bestämma antalet objekt utan att således räkna dem är begränsad till ungefär fyra (mer om de är presenterade på ett strukturerat sätt, vi behöver inte räkna hörn för att skilja mellan en kvadrat och en pentagon) vilket tydligen inte är bättre än vad råttor och kråkor mäktar. Att räkna är således en strategi vi utvecklat för att kompensera för vår svaga kognitiva förmåga som inte är mycket att skryta med jämfört med många djurs (schimpanser lär vara överlägsna människor när det gäller att spela ’memory’) och som utgör den enklaste kopplingen mellan matematiken och verkligheten och utgör något objektivt som vi alla måste vara överens om.

Naturligtvis inträder varje gång matematiken tillämpas på den verkliga världen aspekter som ligger utanför matematiken. Det är en sak att räkna några knappar som ligger på ett bord och någonting helt annat att räkna objekt som kan vara svåra att särskilja från varandra liksom svåra att avgöra om det skall räknas eller inte (t.ex. röstsedlar). Med andra ord det grundläggande problemet med att räkna i verkliga livet är att ha tillgång till en väldefinierad mängd av väldefinierade objekt. Dessutom om antalet objekt är mycket stort bli en direkt fysisk räkning ogörlig. Du övertygar inte dig själv om att tusen plus tusen är två tusen genom att förfärdiga tusen små papperslappar av säg gult papper och på samma sätt tusen små lappar av ett blått papper, och sedan blanda dem samman och räkna en efter en. Detta en efter en räknande, vilket utgör den psykologiska basen för Peanos axiom, är omöjlig att genomföra om du vill räkna antalet böcker i Borges babelska bibliotek (antagande en precis definition av vad som är en bok, något som Borges faktiskt tillhandahåller, men det står dig givetvis fritt att föreslå din egen) men du har inga svårigheter att presentera detta tal i vår standardiserade positionsform, betydligt svårare skulle det vara att representera det med en hög av knappar. Något sådan skulle utgöra en uppgift vars praktiska problem skulle inte stä i rimlig proportion till de eventuella praktiska fördelar denna skulle medföra. Så mycket för dem, som likt J.S. Mill önskar förankra räknandet till det konkreta, och begränsa vad vi vet till det fysiskt påtagliga.

Efter denna inledning är vi beredda att skrida till verket.

Matematik som vetenskap

Vad vi inte kan undvika är det fysiska rummet där allting tilldrager sig ordnade av tiden. Om vi begränsar oss till rummet konfronteras vi med geometrin som går långt utöver dess praktiska roll som dess namn avslöjar. Syftet med Euklides framställning är att ge en matematisk beskrivning av det för att göra det tillgängligt till den mänskliga föreställningen (inte bara dess hand). De gamla grekernas stora bidrag till matematiken och därmed till vetenskapen var den deduktiva metoden vilket ledde till den axiomatiska grunden[1]. Detta möjliggör för den mänskliga föreställningen att ta kontrollen över rummet; vilket innebär att istället för att bege dig ut och handfast konfrontera rummet kan du förlita dig på din förmåga att resonera. När du inser detta för första gången är detta med en berusande känsla. Du kontrollerar världen och inte tvärtom! Ett grundläggande antagande är att de sanningar som har erhållits genom tanken bygger på en solidare grund än de som erhålles genom sinnesintryck. Den inledande, något naiva uppfattningen, är att man genom att sätta upp ett axiomatiskt system kan man genom en rent deduktiv process nå sanningar bortom tvivel; men det hela är mera subtilt. För det första man måste starta någonstans, man kan inte tillåta en oändlig regress. Och när det gäller axiomen kan det vara behändigt att göra en skillnad mellan axiom och postulat som Euklides gjorde. Axiomen har att göra med resonerandets principer som är universella och omedelbart igenkännbara såsom sanna och oundvikliga, kort sagt självklara (som sagt med tanken har vi det intimaste förhållandet); medan de senare har att göra med grundläggande fakta om de objekt vi ämnar studera syntetiska fakta a *priori* i Kants terminologi. Det första kan vara svårt att formulera och framför allt att göra en komplett lista av eftersom många sätt att resonera igenkänns som sådana när de först dyker upp (precis som om man alltid har känt till dem, men bara glömt dem - jämför Platons föreställning om *amnesen).* Man formulerar detta som att det är intuitionen vars auktoritet utgör grunden för axiomen. När det gäller postulaten har vi ambitionen att göra dem lika självklara som axiomen, men härvidlag upptäcker vi att en perspektivförskjutning har ägt rum. Postulaten ses inte längre såsom sanna i någon djupare mening utan som konventioner; de är sanna ty vi bestämmer oss helt enkelt för att de skall vara sanna. Vi frågar aldrig om reglerna för schack är sanna, det är en överenskommelse och det definierar spelet schack, på samma sätt skall man betrakta postulatens sanningsvärde, de är helt enkelt tautologiskt sanna. På detta sätt är våra studieobjekt definierade av postulaten, snarare än att de senare utgör ett uttryck för de förra. I detta perspektiv kan vi tala om de objekt matematiker studerar som hjärnspöken, men det finns en hake till detta, som vi kommer att se senare. Axiom, i meningen resonemangsprinciper[2] är en del av hårdvaran och kan inte ändras lika lätt. Folk kan lockas att betrakta logiken själv som en mänsklig konvention (i själva verket något som har pådyvlats mänskligheten av vita män) men hur formulerar man en alternativ logik? Och framför allt hur kan du tillämpa den utan att falla tillbaka i gamla spår? I själva verket om du kan tillämpa dessa nya resonemangs principer så rör det sig om postulat inte om axiom. Om du har getts reglerna

---

[1] Man kan jämföra med den grekiska materialistiska atomläran, som visserligen var rent spekulativ, men som företar slående likheter med den axiomatiska metoden. Essensen av denna är att materian är inte oändligt delbar och att de minsta partiklarna har inga inneboende egenskaper alls, ty då vore den inte delbar. Materians egenskaper är baserade på (kan härledas ur) kombinationer av partiklar, och detta synsätt (meta-paradigm?) har väglett utvecklingen av den moderna kemin. På samma sätt såg grekerna på axiomen, som odelbara (icke härledbara ur enklare) och satser som intrikata kombinationer av axiom.

[2] det är givetvis en källa till missförstånd härvidlag eftersom i dagligt tal axiom identifieras med vad jag kallar postulat

för ett spel så är det underförstått att du måste följa dem, men detta krav kan inte läggas till reglerna.

Det yttersta syftet med att etablera ett axiomatiskt system är inte att uppnå total visshet, detta är sannerligen en undflyende ambition, utan för att göra de underliggande resonemangen transparanta och därmed göra det möjligt att dela dem och därmed kritisera, och, som det är viktigt att understryka, syftet med kritik är inte att avfärda utan att modifiera. Genom detta blir den matematiska världen en del av den sociala och uppfyller därmed de kriterier på objektivitet som tillhör denna. Den axiomatiska ansatsen är nära relaterad till det demokratiska projektet. Demokratins kärna är inte, i motsats till vad i folk i allmänhet tycks tro, att avgöra frågor genom omröstning, utan transparensen. Detta innebär ett öppet redovisande av argument, liksom rätten för alla att delta i diskussionen; och vad som skall bedömas är inte de som framför dem, utan det inneboende värdet av vad de framför. Den axiomatiska presentationen av matematiken placerar den på samma sociala nivå som ett spel eller en domstol. Detta har föranlett personer som Reuben Hersh att betrakta matematiken som en del av den mänskliga kulturen jämförbart med konsten och rättssystemet, och speciellt att inte erkänna någon högre form av objektivitet än den sociala. Den logiska (eller skall jag skriva den bokstavliga) slutsatsen hamnar i post-modernismen, den moderna versionen av den gamla sofismen. Ett kritiskt förkastande av detta leder till frågan om Platonismen, mer specifikt den matematiska Platonismen, till vilken vi skall återkomma.

Under 1900-talets tidiga decennier inleddes ett försök att sätta det logiska tänkandet under lupp. I själva verket att göra postulat av axiom, ja att rentav att försöka göra det logiska tänkandet själv till ett föremål för en matematisk studie. Vi kan tänka på detta som introspektion par *excellence,* eftersom det innebar att den mest intima formen av mänskligt resonerande skulle distanserat nagelfaras. Aristoteles var pionjären genom sin axiomatisering av syllogismer vilket föregick Euklides men i motsats till den senare elegant genomfört utan defekter (men uppenbarligen var Aristoteles uppgift mycket enklare). C.S. Peirce kan ses som den förste moderne matematiske logikern, och hans tankar om detta är mycket intressanta. Han hävdade att vissa matematiska objekt, som de hela talen, kan mycket väl vara mer grundläggande än logiken. Vidare förnekade han att matematiker har något behov att studera logik, för dem var logiken inneboende och innebar inget ’studium utav’ i motsats till ett 'studium genom’. Ja matematiken innefattar långa och komplicerade deduktiva tankekedjor utan motsvarighet i andra mänskliga sammanhang, något som bara blivit än tydligare under 1900-talet. Slutligen förklarade han att matematisk logik hade ingenting att göra med matematikens grundvalar, utan var att betrakta som en del av matematiken (och inte nödvändigtvis en viktig eller intressant del?) men jag misstänker att det kan vara den del av matematiken som är mest tillgänglig för lekmän. Jag tror att man med säkerhet kan hävda att Peirce skulle ta avstånd från varje antydan att matematiken kan reduceras till logiken och till ett manipulerande av formella symboler utan någon mening, en attityd som delades av Russell och Wittgenstein. Detta betyder inte att Peirce var ointresserad av att manipulera formella symboler, men att han hade en klar uppfattning om dess begränsningar. Enligt honom hörde den logiska basen för matematiken, som alla matematiker insöp med modersmjölken, till moralfilosofin.

Den bokstavliga konsekvensen av en axiomatisk ansats är en formalism som reducerar matematiska objekt och teorier till spel med ingen relation till verkligheten och vilket således innebär att frågan om sanning är irrelevant och saknar metafysisk mening. Detta var inte vad de gamla grekerna hade i åtanke utan de var genuint intresserade i någonting verkligt - det fysiska rummet. De postulat de valde var inga konventioner men självklara sanningar som kunde lika lite ifrågasättas som principerna för logiskt tänkande. Således var det inte en tillfällighet att postulaten skulle vara så enkla och så få som möjligt (i samma anda som Descartes efterlysning av klara och väldefinierade begrepp). Det är precis genom denna förankring i en fysisk verklighet som gjorde den axiomatiska ansatsen så spännande eftersom den förlänade makt över verkligheten, vilket inte skulle ha varit fallet om det endast rört sig om ett formellt system uppställt via fiat. Det är upplysande att jämföra Euklides axiomatiska system med ett mycket modernare, nämligen Zermelo-Fraenkels axiom för mängdläran. Den förra är välkänd för alla matematiker (eller borde vara det) och var fram till 60- talet något som skolbarnen konfronterades med; medan få matematiker bekymrar sig om Zermelo-Fraenkel annat än som ett kuriosum. Ingen matematiker som inte är specifikt involverad med matematisk logik behöver referera till det i sin forskning. Den stora skillnaden mellan Euklides och Zermelo-Frankel är att den förra handlar om någonting som är av stort intresse för de flesta av oss, nämligen det fysiska rummet, medan Zermelo-Frankel handlar om ett matematiskt språk, nämligen mängdläran. Den naiva mängdläran ledde till en radda motsägelser, den mest kända varandes Russell-paradoxen [3], vilket uppenbarligen var högst genant, således valdes axiomen för att undvika de uppenbara fallgroparna. Man kan se på axiomen som ett slags trafikregler, eller mera generellt som en kodifierad rättsbalk, eller, för att ta språkmetaforen bokstavligt, en grammatik. Det fysiska rummet är oss givet, men språk uppfinner vi själva (låt vara att de tenderar att leva sina egna liv), och är således bara sociala konventioner (vilket är ett steg ovan individuella egenheter). Mängdläran utgör matematikens språk, men är matematiken bara ett vetenskapens språk, som Galileo hävdade [4]. Men utvecklandet av mängdläran hade ett definitivt syfte lierat med axiomatiseringens formalism. Ett axiomatiskt system må inte ha någon påtaglig relation till verkligheten, men som sådant utgör den sin egen verklighet. För att denna verklighet skall bli påtaglig och inte bara ett fantasifoster måste det formuleras. Att något formaliseras betyder att det kan, åtminstone i princip, implementeras som en fysiskt existerande maskin och således bokstavligen bli ett fysiskt påtagligt objekt, och som sådant extern till människan, och därmed ett objektivt faktum[5]. Med tillkomsten av moderna elektroniska datorer blev sådana implementeringar vardagsmat och kan göras på imponerande sätt; dock, som beskrevs i inledningen, sådana fysiska implementeringar är inte nödvändiga, i själva verket oftast irrelevanta och inte sällan monstruöst irrelevanta. Om ett formellt (axiomatiskt) system kan man ställa några mycket hårda frågor, som huruvida systemet är konsistent, d.v.s. motsägelsefritt. Detta är inte en frivol fråga som kan lösas via konventioner, det är i själva verket en meta-fråga, inte om axiomens sanningshalt eller vad de betyder, utan hur de interagerar (i det långa loppet)[6].

---

[3] Vilken är ett direkt korrollarium av Cantors bevis för att potensmängdens kardinalitet är strikt större än mängden själv. Om det är uppenbart att de har samma kardinalitet erhåller vi en paradox

[4] eller mera exakt, naturens? Men den traditionella innebörden av vetenskap var naturstudiet (naturfilosofin). De samhälleliga vetenskaperna är ett senare påfund

[5] En uppfinning är extern till dess uppfinnare som därefter blir obehövlig, men man kan diskutera huruvida en uppfinning inte kan utnyttjas om den separeras från ett kulturellt sammanhang som mänskligheten utgör. Mer specifikt, en författares verk överlever denne, men vad händer om det språk med vilket det skrivits dör ut? Den antika kulturen dog ut, eller snarare gick i ide under tusentalet år, dess språk försvann såsom talspråk men inte som skriftspråk.

[6] Man kan jämföra med kemin, där de kemiska sammansättningarna inte har någon inneboende mening utöver hur de interagerar med varandra. I själva verket bestäms deras kemiska egenskaper, i motsats till deras fysiska som vikt etc., av hur de interagerar med andra kemiska sammansättningar.

Moderna logiker drar sig inte för att lägga till det själv-refererande metafaktumet om konsistens till axiomen, vilket kan jämföras med att lägga till regeln att reglerna skall följas till reglerna för ett spel. Om man inte kan bevisa inkonsistens, kommer det utvidgade systemet fortfarande vara konsistent, men givetvis har tillägget av axiomet ingen inverkan på konsistensen, speciellt kan den inte påtvinga konsistens. Och att lägga till regeln att regler skall följas har ytterst marginell inverkan på att det skall bli fallet.

Om vi har en väldefinierad maskin kan vi underställa den en matematisk analys, och detta är vad den framstående matematikern David Hilbert önskade göra. Hans hopp krossades dock av Kurt Gödel som gav ett bevis för att detta inte kunde göras. Mera specifikt att i ett tillräckligt kraftfullt axiomsystem (d.v.s. ett som kodifierar de naturliga talen) kommer det alltid att finnas sanna satser som inte kan bevisas. Den metafysiska delen av beviset består i att vi i den mänskliga fantasin kan föreställa oss ett oändligt antal fall uppradade ett efter ett. Detta är väsentligt ty han implementerar inte axiomsystemet i ett objekt i det fysiska rummet utan förlägger det bland heltalen, därav förbehållet att det måste kodifiera de naturliga talen. Den tekniska delen av beviset består i att sudda ut den avgörande distinktionen mellan ett system och att tala om systemet, den senare aktiviteten brukar refereras till som meta-matematik. Således strävar han efter att bädda in den meta-matematiska delen i systemet, så att tala om hur systemet agerar, blir bara ett av de många enskilda ageranden. Mera specifikt alla påståenden kan kodifieras som aritmetiska påståenden. Detta kan inte göras fullständigt men tillräckligt för att den eftersökta slutsatsen skall kunna dras, vilken bygger på själv-referensens paradoxer som går tillbaka till antiken och som utnyttjades av Cantor i sin ovan nämnde studie av potensmängders kardinalitet (det berömda diagonal-tricket) men som Gödel skruvade åt än hårdare. Mycket nonsens har sagts om dennes sats, men faktum är att det i själva verket har haft mycket litet praktiskt inflytande på matematiken, bortsett från jakten efter olösbara problem, något som egentligen har mer med matematisk logik att skaffa än med matematiken själv. Om matematiken kunde reduceras till logiken, skulle detta faktum också reduceras till logiken, och vi skulle ha en form av självmotsägelse.

Innan vi stänger dörren till axiomatiseringen bör man notera dess viktigaste konsekvens, nämligen dess roll i felsökning. Vad som ansågs den största defekten i Euklides framställning var det ökända femte postulatet som besitter ett antal ekvivalenta formuleringar, varav den mest citerade går tillbaka till Playfair[7], nämligen att genom en punkt utanför en given linje kan man dra en och endast en linje parallell till den givna. Detta är ett postulat som fastän intuitivt är inte lika enkelt och självklart som de andra, och fastän inga tycks ha betvivlat det ansågs det vara i behov av ett seriöst bevis i sedvanlig euklidisk anda. Det sågs som en skönhetsfläck i Euklides presentation och under ett par tusen år gjordes försök att avlägsna denna. Genom att inkludera postulatet istället för att 'mörka' visade Euklides på föredömlig intellektuell ärlighet. Senare negerades det, och resten är historia.

Försöken att bevisa det får anses ha gjorts mycket sporadiskt under denna långa tid och det var först på 1700-talet som systematiska försök gjordes som alla byggde på principen av det indirekta beviset; man antar att något är sant, härleder konsekvenserna och stöter man på en motsägelse, sluter man att det som antagits inte kan stämma, och därmed antager motsatsen (det uteslutna tredje). Vad man gör är att skapa en inte sällan rik imaginär värld vars enda

[7] John Playfair (1748-1819) en skotsk präst och vetenskapsman, mest känd för sin presentation av den skotske geologen John Huttons uniformatismteori som bannlyste katastrofer som förklaringsmodeller för den geologiska historien och som kom att dominera den moderna geologin under nästan tvåhundra år.

syfte är att förintas och ur askan vaska fram det åtråvärda sanna påståendet. Detta är vad 1700-tals matematiker som Sacchieri gjorde, men den värld de skapade må ha varit absurd men detta är inte samma sak som logiskt omöjlig, det ankom på trion Gauss, Bolyai och Lobachevsky att inse den logiskt konsistenta möjligheten av en icke- euklidisk geometri. Principen att om *P* är falskt så är *ickeP* sant kallas det uteslutna tredje. Detta är en meta-princip med vilken man kan bevisa den principiella existensen av någonting utan på något sätt ha en aning om hur denna kan återfinnas eller konstrueras fram. Eftersom Sveriges befolkning vida överstiger antalet hårstrån som en person kan ha finns det faktiskt miljoner svenskar som har lika många hårstrån som någon annan svensk, men det är ett helt annat problem att finna explicita exempel på två sådana (ingen är helt flintskallig). Av detta skäl bannlystes indirekta bevis av vissa logiker, så kallade intuitionister[8], i början av förra seklet. Även om Intuitionismen är av stort filosofiskt intresse har det haft ringa inflytande på den moderna matematiken.

Låt oss bara påpeka att femte postulatet spelar en väsentlig roll i den klassiska euklidiska geometrin. Samtliga intressanta geometriska fakta, som existensen av likformiga men icke kongruenta trianglar, vinkelsummans konstans och Pythagoras teorem följer av det. Innan vi går vidare tillåter vi oss en liten utvidgning.

Geometri och Verkligheten

Den mest omedelbara geometrin, nämligen den som är direktast kopplad till våra sinnesintryck, är den sfäriska geometrin. Vårt (potentiella [9]) synfält är en sfär i vilket ögat befinner sig i centrum. Detta ger anledning till en mycket annorlunda syn på sfären än den vi vanligen har när vi externt betraktar en sfär som en boll utanför oss (t.ex. jordklotet). Dess universella manifestering är himmelssfären vilken är i princip den samma för oss alla[10]. Linjerna motsvaras av storcirklar, som är 'böjda' när man ser dem utifrån men helt raka sett från sfärens centrum, ty storcirklar är givna av snittet med plan genom sfärens centrum. Som ovan antytts kan vi inte samtidigt bli medvetna om hela vårt synfält, eftersom vi saknar ögon i nacken (och i själva verket kan vi inte ens föreställa oss hur det vore om vi hade dem). Vi har också svårigheter med att uppfatta stora trianglar, eftersom vi av fysiologiska skäl (ögats konstruktion) endast kan fokusera på en förhållandevis liten del av vårt synfält, som då upplevs som ganska platt. Vårt synfält är 2-dimensionellt och vi kan vandra runt det genom att vrida på nacken. Den 3-dimensionella (euklidiska) geometrin har en betydligt indirektare relation till våra sinnesintryck, den måste i än högre grad mentalt konstrueras. När vi rör oss runt i rummet, ändras de visuella intrycken, väsentligen via perspektivlagarna. För att erhålla en känsla av rummet behöver vi integrera alla dessa sinnesintryck till en konsistent helhet, en process som inte bara innefattar synen utan även muskulaturen när vi förflyttar oss. På det sätt detta görs, inte bara av människor, är mycket sofistikerat om än omedvetet, vilket bland annat visar sig i att de flesta barn inte ritar i perspektiv, och att perspektivet först dök upp i

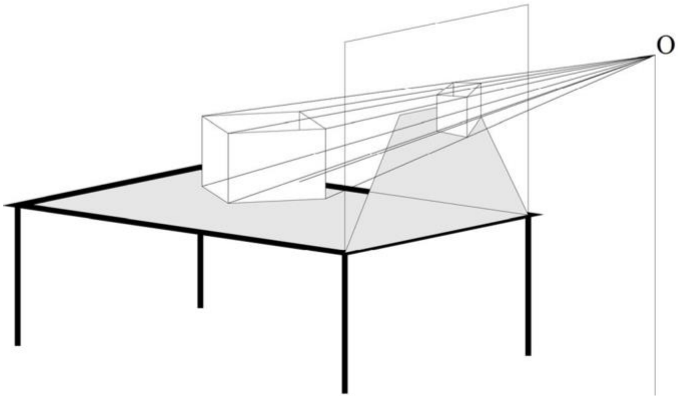
[8] Intuitionismens upphovsman är den holländske matematikern L.E.J. Brouwer (1881–1966), för övrigt känd för sin fixpunktsats (indirekt bevisad!). Intuitionismen har fått förnyad aktualitet inom datalogin.

[9] Vi har inte begåvats med ögon i nacken

[10] Om vi ignorerar de dagliga och årstidliga förändringarna beroende på jordens dagliga rotation kring sin egen axel och det årliga omloppet runt solen. Frestande som det vore att göra en astronomisk utvidgning kan vi inte unna oss detta, men det räcker att påpeka att synfältet är detsamma men jorden skymmer olika delar av den beroende på tiden och fötternas position på jordytan.

konsthistorien med renässansen[11]. Jag kan nu inte försaka tillfället att förklara en undran som Gombrich berör i sin *Art and Illusion.*

Matematiken bakom perspektivet förklaras till fullo genom bilden nedan



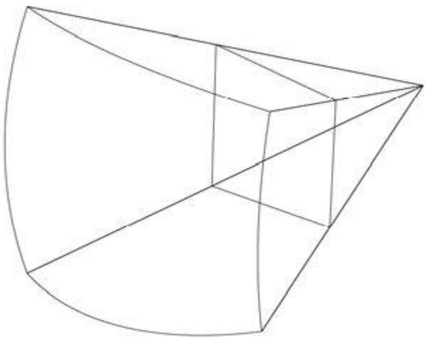
Givet en punkt i rummet, dra en linje genom det till konstnärens öga och bestäm vid vilken punkt den skär duken. Detta är för övrigt den väsentliga idén med den projektiva geometrin, vilket inte är en alternativ geometri, men en systematisk metod att undersöka vissa aspekter av geometrin, framför allt att ignorera vinklar och längder. Genom att utnyttja kartesiska koordinater (som kommer att tas upp senare) kan man skriva ner enkla formler som relaterar positionerna för punkter på duken till ögats och de punkter som skall avbildas[12]. Gombrich ställer frågan att när man framställer en husfasad (en rektangel) vars centrum du vänder ditt ansikte emot, så kommer de fasadens vertikala kanter att vara längre ifrån dig än vad som är framför näsan på dig, så den övre och undre kanten på fasaden borde vara böjda, men vi upplever dem inte som sådana. Gombrich tillhandahåller en undermålig förklaring, huruvida av inkompetens eller av bristande tillit till läsarnas förmåga att förstå en fullödig, kan jag inte uttala mig om[13], men detta är irrelevant eftersom jag inte kan motstå frestelsen att ge en korrekt förklaring. Ja rektangelns projektion på duken kommer fortfarande att vara en rektangel och även om rektangelns vertikala kanter kommer att framställas lika höga som den centrala höjden, dess utsträckning i betraktarens ögon vill däremot bli kortare än en central vertikal[14]. Om vi istället projicerar rektangeln på synfältets sfär, kommer kanterna att troget återbildas med sin rätta utsträckningar i synfältet, och kanterna kommer att bli böjda, men bara om de inte betraktas från synfältets centrum, som i fallet nedan.

[11] Man skall vara försiktig med att förklara avsaknaden av perspektiv med okunnighet. Den geometriska principen bakom det är mycket enkla och uppenbarligen kända av de gamla grekerna. Av vad jag vet återfinns inga perspektivframställningar på vaser, och inga platta bilder har överlevt (givetvis mosaiker, men mosaiker tillåter ingen precision, pixlarna är stora). Men framför allt är konventioner mycket viktiga i visuella representationer. Konsthistorikern E.H. Gombrich är en god källa för sådana diskussioner.

[12] I själva verket är det så som jag har programmerat bilden ovan som utnytt-jar ett metaperspektiv för att sätta det hela i perspektiv och därmed på en platt yta.

[13] Hade jag uppmärksammat detta när jag först läste boken på tidigt 80-tal kunde jag ha skrivit och frågat författaren, men detta var inte en möjlighet trettio-fem år senare

[14] Det må vara förvrängningar men räta linjer förblir räta linjer, endast deras längder må ändras. Om du önskar att en bild skall troget återger vad den föreställer är det viktigt att betraktarens öga befinner sig i konstnärens eller kamerans öga, d.v.s. projektionscentrum. Ett foto taget med ett teleobjektiv skall betraktas på armlängsavstånd, medan ett taget med ett vidvinkelobjektiv skall betraktas mer närgånget än vad som är bekvämt. Det är därför vidvinkelfoton visar sådana dramatiska förvrängningar



Det intressanta med denna förklaring är att det liknar mera en förklaring av ett fysikaliskt fenomen än ett matematiskt. Euklidisk geometri handlar om det fysiska rummet, eller är åtminstone inspirerat av detta (icke-Euklidisk optik utgör ett intressant ämne). Optiken är en del av fysiken men dess geometriska bas inkorporeras lätt i den Euklidiska geometrin och Euklides själv skrev även ett verk om optiken.

Grekerna gjorde åtskillnad mellan världen under månen och den celesta. Studiet av den celesta, d.v.s. en studie av positionerna av objekt på den celesta sfären, involverade sfärisk geometri, i själva verket även sfärisk trigonometri, som historiskt sätt kan ha föregått den plana. Dock kände de inget behov av att tänka på det som en alternativ geometri eftersom sfären uppenbarligen var en del av den ordinära 3-dimensionella euklidiska geometrin, och storcirklarna, fastän de såg raka ut på himmelssfären bände sig tillbaka till sig själva och var inga 'riktiga' linjer. Den sfäriska geometrin som uppstår i och med en av negationerna till parallellpostulatet kan inte reduceras till det 3-dimensionella rummet (men till det 4-dimensionella).

Grekerna och deras efterföljare gjorde ingen radikal åtskillnad mellan det lokala euklidiska rummet i vilket de vistades och den celesta sfären, som de kunde ha gjort genom att förlägga denna oändligt långt bort. I själva verket försökte de bestämma avstånden till Solen och Månen (till den senare faktiskt ganska exakt) således betraktande de dessa som objekt som i princip var beröringsbara. Månen helt enkelt varandes en stor sten inte bara på utan även i himlen. Fixstjärnorna sågs som fästade på en ofantligt stor himmelssfär men ändock med ändlig radie, vilket naturligt ledde till frågan vad som låg bakom den, Om den däremot ses som av oändlig radie har denna fråga föga mening. Det dröjde ända fram till 1837 innan den första distansen till en stjärna uppmättes, men långt innan dess var man övertygad om att stjärnornas avstånd var ändliga. I själva verket utgjorde detta ett argument mot den heliocentriska teorin eftersom stjärnorna inte uppvisade någon parallax vilket man skulle ha förväntat sig från jordens rörelse kring solen (till vilket Kopernikus replikerade att de var alltför långt borta[15]). Men man kan föreställa sig att detta inte vore fallet.

Om jorden hade roterat kring en sol isolerad i den intergalaktiska rymden, de galaxer vi skulle ha sett på himlen skulle ha varit bortom det mätbara, eftersom de 'stegar' vi har använt skulle ha haft sina nedersta steg borttagna. Då skulle det ha varit logiskt att anta att de i själva verket befann sig oändligt lång borta, ty ingen motsägelse skulle ha uppvisats.

Vi skulle då ha delat upp verkligheten i två delar, i en fysisk del i vilken vi kan förflytta oss och beröra objekt däri befunna, och en rent celest del endast visuellt tillgänglig.

I själva verket är ljusets hastighet ouppnåelig för objekt med massa, men detta gäller inte för fotoner. Man kan ge en elegant formulering av detta genom att begagna sig av Minkowskis välkända formulering av rumstiden och konen av världslinjer som kan ges en hyperbolisk struktur, d.v.s. det hyperboliska rummets geometri, för vilka fotonernas världslinje utgör oändligheten, bokstavligen oändligt långt borta. Detaljerna är lite väl intrikata för en

[15] Den tyske matematikern och astronomen Bessel lyckades uppvisa en parallax (som rörde sig om en bråkdel av en bågsekund) men då hade man för länge sedan uppgivet tanken på att stjärnor var ekvidistanta till jorden. Bessel hade valt en stjärna (61 Cygnus) med markant egenrörelse eftersom detta borde vara ett tecken på att den var relativt närliggande.

sidoanmärkning förståelig för en lekman. En referens skulle kunna vara *The Road to Reality* av Roger Penrose.

Om detta hade varit fallet hade astronomin upptaget en position mellan matematiken och de fysikaliska vetenskaperna.

Det femte postulatet är således mycket kraftfullt, genom detta kan lokal information skalas upp obegränsat via likformighet, speciellt tillåta oss att uppskatta astronomiska avstånd, speciellt att kunna uppmäta avstånd till objekt till vilka det är omöjligt att fara med ett måttband i släp. Detta visar inte bara matematikens triumf men också vetenskapens, och också hur matematiken på ett fundamentalt sätt är kopplad till verkligheten, vilket betyder att matematiken har innehåll och är inte bara ett formellt spel.

Matematiken i praktiken

Frågan vad matematiken egentligen är kan antingen bli ställd metafysiskt (och det tänker vi göra) eller i praktiken, således genom att beskriva vad matematiker gör. Att en matematiker bevisar teorem är det enradiga standardsvaret, men vad betyder detta egentligen? Många skolelever blir frustrerade när det kommer till bevis. 'Hur gör man bevis’ frågar de förtvivlat. För många studenter förefaller matematiken något som uppfanns av sadistiska lärare för att kunna sätta krokben. Efter att äntligen ha bemästrat den ena obegripliga uppgiften efter den andra begärs det plötsligt av en att ’göra bevis’ (inte att ’bevisa’ någonting utan för att 'göra bevis’ som vore detta en märklig ritual). Denna gång tycks de inte ha någon aning om vad det rör sig om, men de med en viss benägenhet för matematik fattar genast galoppen som om det vore någonting som de alltid velat göra i livet, men först nu upptäckt det. Att ’göra bevis’ är ingenting man kan lära sig genom att lära sig regler, men detta skulle knappast vara en källa till tröst för de förvirrade. Hur bevisar man saker, som väsentligen är samma sak som att lösa problem (men detta må inte vara uppenbart för dem som endast ser aktiviteten som sådan inte skälet till det). Polya skrev en bok om detta. En underhållande för att inte säga charmerande bok, men jag tvivlar på att den verkligen kan hjälpa folk att lösa matematiska problem fastän didaktiker tar den på allvar (men jag misstänker att de inte har något val). Ett strikt logiskt bevis påminner om en presentation av en bild pixel per pixel. Det är inget fel med det senare, det har sina definitiva syften, men det har väldigt lite att göra med förståelsen av en bild som sådan, det utgör bara en lång räcka av tal som inte tillåter något att 'poppa upp’ i den mänskliga fantasin. Man bevisar ingenting genom att göra en slumpvandring på logiska pixlar även om en nybörjare kan förledas tänka i sådana banor efter att ha utsatts för några komplicerade bevis. Jag tänkte definitivt i sådana banor när jag först konfronterades med mer formellt matematiska bevis, men bilden är inte helt fel, det är många aspekter av matematiken som har just denna form, jag tänker speciellt på algebraiska manipulationer, som utgör en slags slumpvandrande beräkning. Matematiker må, liksom andra, läsa ett bevis steg för steg men detta är sällan förklarande trots att bevis skrivs informellt avsedda för människor och inte maskiner[16]. Vad en matematiker är på utkik efter i ett bevis är nya idéer, men idéer är svåra att befästa och undflyr envist precisa formuleringar och är fullt tillgängliga endast genom att läsa mellan raderna. En matematisk presentation inkluderar ofta en mängd av detaljer för att bli tillräckligt ’själv-innehållande’ (’self-contained’), vad som i andra vetenskaper är känt som

[16] Matematiska bevis tenderar att bli mer och mer komplicerade och därmed ökar risken för att man 'halkar’. Man har försökt att mer eller mindre fullständigt formalisera bevis för att tillåta en rent mekanisk kontroll, d.v.s. av en dator. Svårigheten är att översätta informella bevis till en strikt formell form, vilket måste göras för hand.

duplicerbarhet och som kan dölja det som är av verkligt intresse; men det är dock svårt att undvika att matematikerns ambition bygger på dennes förmåga att bidra med tillräckligt med logiska argument för att underbygga vad som hävdas. Det är i denna mening man kan argumentera att matematikerns 'vetenskapliga’ metod består i att följa en deduktiv process, eller åtminstone att presentera resultaten deduktivt, fastän detta knappast utgör någon hjälp att göra matematik. Man gör matematik genom att ha idéer och dessa är inte så lätta att finna. Man lär sig inte matematik genom att lära sig resultaten, d.v.s. lära sig teoremen fastän i många fall kan du tvingas att ’ta dem på orden’, d.v.s. ta dem som ytterligare axiom (postulat) även om du inte nödvändigtvis förstår dem, vilket innebär att du inte förstår varför de skall vara sanna. Det viktiga i ett teorem är inte dess precisa formulering (såvida man inte använder det i en deduktivt länkad kedja) utan på vilken idé den är baserad; om denna är förstådd kan du modifiera det för dina syften and i själva verket endast i detta fall har du den moraliska rätten att tillämpa dem.

I syfte att förankra diskussionen i något mera konkret och även på en nivå tillgänglig för lekmannen kommer jag att beröra Euklides metoder och hur dessa ändrades drastiskt med införandet av kartesiska koordinater (något som alla lekmän bör vara förtrogna med).

Euklides element serverar inte bara en lista av axiom (postulat) men genom sin presentation även en metod för geometriska upptäcktsfärder. I tillägg till grundläggande begrepp som punkter, linjer och plan, introduceras även hjälpbegrepp som trianglar och cirklar. Av fundamental betydelse är trianglarna till vilka man associerar längderna av deras sidor samt vinklarna till deras hörn, inalles sex kvantiteter. Det centrala resultatet utgörs av kriterier för kongruenta trianglar, nämligen för trianglar med samma kvantiteter, eller mer handfast och därmed mer upplysande, som kan läggas över varandra och passa perfekt. Man skall notera att det är många intuitiva begrepp som att flytta och rotera en triangel som aldrig formaliseras i Euklides axiomatiska presentation även om de ofta utförs, om än implicit, i resonemangen. Standarden för rigoröst resonerande och fullständighet ändras över tid, men det väsentliga är att Euklides aldrig begår ett misstag, alla hans bevisade påståenden är korrekta, vi är fortfarande överens med honom tvåtusen år senare. Sådana historiska omständigheter har på ett avgörande sätt bidragit till övertygelsen att matematikens sanningar är eviga (eller snarare triviala?). För att återgå till den konkreta presentationen är det slående faktumet är att om tre av de sex kvantiteterna överensstämmer, gör alla det, d.v.s. trianglarna är kongruenta, dock med ett viktigt undantag i den euklidiska geometrin där som vi redan påpekat, två trianglar må ha samma vinklar men ändå inte samma längder på sina sidor. För de icke-euklidiska geometrier föreligger inte detta fenomen, att känna tre av kvantiteterna är tillräckligt för att känna alla sex. En av följderna av detta är att i de icke-euklidiska geometrierna så har vi ett inneboende kriterium av storlek, precis som vi även i den euklidiska geometrin har för vinklar. Vi kan matematiskt definiera en rät vinkel, men inte en meter, ty det senare måttet saknar geometrisk signifikans.

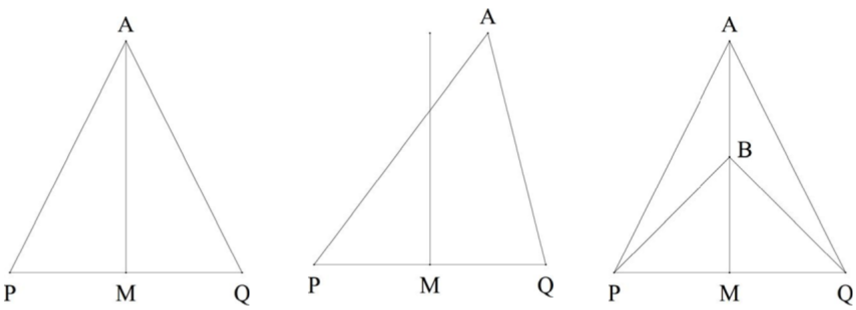
Givet nu trianglar och kongruensvillkoren kan vi formulera en allmän strategi att bevisa teorin inom den euklidiska geometrin. Det naturliga är att finna trianglar i figurer och söka efter kongruenta vilket kommer att innebära att man kan identifiera fler sidolängder och vinklar, vilket sin tur leder till nya kongruenta trianglar. Att bara ge axiomen är inte tillräckligt man behöver även en metod att kombinera dem så att man kan navigera i det gigantiska konfigurationsrummet av logiska kombinationer. Det är samma sak med schack, att bara känna till reglerna är ingen garanti för att man skall kunna spela det framgångsrikt inte ens meningsfullt. Spelet, till en stor del genom att spelas, utvecklar en sekundär samling av hjälpbegrepp, som inte på något sätt är kodifierat i reglerna och inte ens påtvingade av dessa utan kan mycket väl vara helt kulturella i meningen att andra civilisationer givet samma regler skulle ha utvecklat helt andra strategier och begrepp att beskriva dessa. Man skulle kunna säga att schackets regler är givna av Gud men sättet att spela schack är en mänsklig uppfinning. På ett liknande sätt utgör även den euklidiska geometrin ett spel lämpligt för skolpojkar i den mån de har fattat vad det rör sig om[17]. Det antas inte sällan för givet att matematisk förmåga och skicklighet i schack är relaterade. Uppenbarligen har vi att göra med en viss överlappning men de två skiljer sig markant från varandra. Schack har ingenting med den verklighet utanför den som definieras av dess regler, speciellt utgör inte upptäckter en viktig del av schackspelandet även om man kan kunna identifiera sådana i den kulturella utvecklingen av spelet. Också i schack konfronteras man inte så mycket med regler utan med en annan mänsklig opponent, vilket gör att psykologiska element träder fram och som uppenbarligen inte föreligger i matematiken. Man kan inte förleda matematiken att bli en tillmötesgående.

Men vi kan hantera geometrin på ett annat sätt, nämligen via koordinater. Dessa introducerades av Descartes, låt vara på ett ganska klumpigt sätt, och samtidigt utforskades det av den mer kapable matematikern Fermat. Koordinater som sådana var ingenting nytt, de gamla grekerna använde sfäriska koordinater (i själva verket polära koordinater) på himmelssfären för att ge stjärnors positioner; vad som var nytt var att koppla dem till algebraiska manipulationer, bokstavligen introducera algebraisk geometri (fastän det i skolorna benämndes förfarande 'analytisk geometri’, kanske på grund av att man 'analyserade' geometrin). Vi tänker oss punkterna i planet givna av par av (reella) tal[18] och de i rummet av tripplar av tal. Den nya idén var att en kurva i planet gavs via ett villkor (typiskt algebraiskt) på de punkter som låg på kurvan. (I gammal svensk skolterminologi talade man om 'orten av’). Givet ett kartesiskt rätvinkligt koordinatsystem (d.v.s. med *x*- och y-axlarna ortogonala) kan man representera cirkeln med centrum i origo ((0,0)) och radien R såsom 'orten' av de punkter (;r, y) som satisfierar $x^2 + y^2 = R^2$ vilket är en omskrivning av Pythagoras sats. Mer generellt, om centrumet läggs i punkten (a, b) erhåller vi istället $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$. Så långt betyder detta inte mycket vi har bara gjort en rättfram översättning av Pythagoras teorem till ett formelspråk, som är mera kortfattat (men detta är bara skenbart, för att förstå vad formeln betyder måste vi översätta den både till en bild och ett vardagsspråk). Vitsen med formler är inte att de är kortfattade, utan att de kan manipuleras, och det är först som de manipuleras i samband med icke-triviala geometriska problem som det visare sin förmenta överlägsenhet. Och det visar sig att just deras manipulerbarhet får hela den kartesianska apparaten att lyfta från marken, och härvidlag uppvisar Descartes sin matematiska (i motsats till hans filosofiska) virtuositet. Vid den tiden var algebran ganska underutvecklad och han var banbrytande i att introducera nya notationer och konventioner. Detta kan måhända tyckas ganska banalt men de var viktiga i att underlätta manipulationer av formler vilket är algebrans syfte. Låt oss illustrera detta med ett enkelt problem.

[17] Till 60-talet var den del av skolkursen. Darwin som inte är känd för att ha varit en flitig student och som senare i livet beklagade sig över sin bristfälliga matematiska kunskap, såg inte desto mindre med nöje tillbaka på sin skoltid under vilken han kom i beröring med den euklidiska geometrins elegans.

[18] Jag skriver ’reell’ inom parentes eftersom ingen formell definition av reella tal existerade vid den tiden, men naturligtvis hade de flesta en mycket stark intuitiv känsla vad de egentligen var, och den senare formella definitionen hade som uppgift att på ett troget sätt spegla denna intuition.

Beskriv punkterna som är ekvidistanta till två givna punkter. Detta är ett typiskt matematiskt problem, alla punkter är inte ekvidistanta till två givna punkter, och problemet består i att översätta den beskrivning som kommer med själva frågan. Vad för slags beskrivning efterfrågas? En sådan fråga har givetvis inte ett entydigt svar men i detta sammanhang är det naturligt att tolka det som en formel, speciellt en algebraisk formel, typ den vi redan gett för cirklar. Med det rätta temperamentet upplevs det som en spännande fråga och man lockas att gå vidare i annat fall ignoreras den (såvida inte den kommer på en test som kommer att avgöra din framtid). Och vad är poängen med en formel? En geometrisk tolkning, och i så fall i termer som man förväntar sig i den euklidiska geometrin, en linje eller en cirkel. Vi känner redan till svaret, nämligen mittpunktsnormalen, alla punkter på den linjen har lika avstånd till de givna, och endast sådana punkter. Figurerna nedan bevisar det på klassiskt euklidiskt maner genom att utnyttja kongruenta trianglar.



På vänstra sidan har vi konstruerat mittpunktsnormalen (AM) med en godtycklig punkt *A* på den. Vi drar linjerna *AP, AQ* och erhåller trianglarna *AMP, AMQ.* Uppenbarligen gäller *AM = AM* (gemensam sida) och *PM = QM* via definitionen av punkten M, och slutligen gäller ∆*PMA = ∆QAM* också genom konstruktion *(AM* är en normal till *PQ).* Tre varandes lika medför att alla sex är lika, via kongruensteoremen, speciellt gäller att *AP = AQ,* så att alla punkter *A* på mittpunktsnormalen har samma avstånd till de två givna punkterna.

För att bevisa att alla ekvidistanta punkter ligger på denna linje frestas vi observera att mittpunktsnormalen delar planet i två distinkta halvor, en av dem innehåller *P* den andra Q, och att punkterna i den senare är närmare *Q* än *P.* Detta må vara visuellt uppenbart, men hur bevisar man det? Vilka ytterligare linjer skall vi rita för att visa att *AP > AQ.* Det är inte helt klart och i vilket fall som helst kommer det att bli ganska komplicerat. Kanske logiskt oantastbart men knappast transparent.

En enklare ansats är att dra linjen genom två ekvidistanta punkter *A, B* och att visa att denna är i själva verket mittpunktsnormalen. Detta är ganska så rakt fram. Trianglarna *ABP* och *ABQ* eftersom deras sidor är av lika längd per definition av *A, B.* Speciellt gäller ∆*ABP = ∆ABQ,* och av samma anledning gäller för komplementärvinklarna ∆*PBM = ∆QBM* (där *M* är nu definierat som snittet av linjen *AB* med *PQ* således ligger *A, B, M* på en rät linje i enlighet ned figuren). Detta medför att trianglarna *PBM* och *QBM* är kongruenta (eftersom *BM = BM, PB = QB)* speciellt gäller *PM = QM* och ∆*BMP = ∆BMQ* och därför nödvändigtvis räta.

Vän av ordning må invända att resonemanget bygger på figurer som helt fräckt antager att *M* hamnar mellan *P* och *Q.* Hur kan vi bevisa detta? Detta är en fullt legitim anmärkning som visar sårbarheten i euklidiska resonemang, nämligen att vilseledas av felaktiga figurer. Den skeptiska läsaren inbjuds till att dra figurer där *M* hamnar till vänster om *P* (eller höger om *Q)* eller rentav i oändligheten (d.v.s. *AB* är parallell till *PQ)* och erhålla en motsägelse.

Nu kan vi göra detta på kartesiskt sätt, med andra ord beskriva orten för ekvidistanta punkter medelst en ekvation. För enkelhetens skull kan vi välja som punkter (0,0) och (0,1) och betrakta villkoret $x^2 + y^2 = (x - l)^2 + y^2$ som lätt kan förenklas till — 2x+ 1 = 0 eller $x = ½$ som ger ekvationen för mittpunktsnormalen, d.v.s. linjen som är vinkelrät mot x-axeln och går genom mittpunkten (½,0). Poängen är att det hela görs som en enkel algebraisk manipulation och involverar ingen visuell geometri alls och kan i princip utföras blint. Medan den första metoden kräver en viss uppfinningsrikedom, kräver den andra knappast någon alls, givetvis bortsett från förmågan att översätta ett geometriskt problem algebraiskt och översätta tillbaka resultatet av manipulationerna. Denna skillnad blir än mer drastisk om vi modifierar frågan något: Betrakta punkterna vars avstånd till en given punkt *P* är det dubbla avståndet till en annan given punkt *Q*. Vilken ekvation satisfierar dessa? Om vi väljer samma punkter *P, Q* som tidigare erhåller vi villkoret $x^2 + y^2 = 2^2((x- l)^2 + y^2)$ som förenklas till $3x^2 - 8x + 4 + 3y^2 = 0$ och genom kvadratkomplettering, redan känt av Babylonierna, kan vi skriva det som $(x-4/3)^2 + y^2 = (4/3)^2 - 4/3 = 4/9 = (2/3)^2$ som vi igenkänner som cirkeln med centrum (4/3,0) och radie 2/3. Det skulle inte vara lätt att finna denna cirkel och att bekräfta den med den klassiska metoden med kongruenta trianglar. Vi kan också välja förhållandet mellan distanserna som vilket tal *k* som helst, och när *k* närmar sig 1 får vi en familj av cirklar med större och större radier som passerar närmare och närmare medelpunkten av *P, Q* som i slutet blir en cirkel med oändlig radie och ett centrum oändligt långt borta på x-axeln, och som visar sig vara just mittpunktsnormalen.

Vad Descartes var intresserad av var inte att lösa specifika geometriska problem utan att presentera en systematisk metod att lösa dem, och som dessutom kunde bli utlärd så att även 'dumbommar' skulle kunna komma upp med resultat som skulle ha förbluffat antikens mästare genom att reducera geometrin till mer eller mindre mekaniska algebraiska manipulationer. Det är knappast något att förundras över att många såg på det hela såsom fusk och att senare uppstod en reaktion att återvända till den syntetiska geometrin, men en reaktion som i ärlighetens namn var marginell och inte en del av matematikens huvudfåra. Å andra sidan skall man inte se den som en opposition, utan endast bevarandet av ett alternativt synsätt som också kunde vara ganska upplysande. Vidare vore det missvisande att förkasta algebraiska manipulationer som mekaniska, utan de kan även i sin tur ses som en källa till uppkomsten av den matematiska algebran. Således kan en kalkyl, frigjord från sitt ursprung utvecklas på sitt eget inneboende sätt. Detta är ett allmänt fenomen av vad som den ryske matematikern I. Shafarevich benämnde matematikens organiska tillväxt.

Man skall heller inte glömma att i vissa fall kan den kartesiska koordinatmetoden visa sig mera involverad än ett underfundigt syntetiskt angrepp. För att *ge* läsaren en känsla för detta gör vi en liten digression med utgångspunkt att relatera en sfärisk triangels area med summan av dess vinklar.

En längre Exkursion

Givet en mängd *X* låt oss beteckna med $\mu(X)$ antalet element i *X*. För två mängder A, B kommer vi då att få

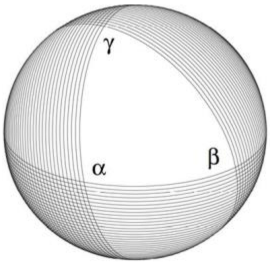
$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B)$

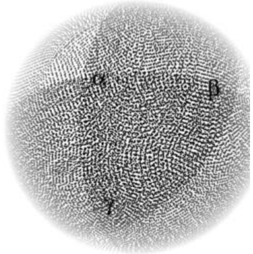
därför att elementen i snittet $A \cap B$ kommer att räknas två gånger. Formeln förblir giltig för vilket mått μ som helst som ger 'storleken' hos en mängd, förutsatt att detta mått på storlek är additivt, vilket innebär att $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$ för godtyckliga disjunkta mängder *A, B*.

Speciellt gäller detta för areor. Notera att detta är från en logisk synpunkt väsentligen en tautologi, eftersom formeln ovan är bara en reformulering av additivet $A \cup B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \cup (A \cap B)$ en union av tre disjunkta mängder. Formeln generaliseras lätt till tre (eller ett godtyckligt antal) mängder. Vi får således för tre mängder

$$\mu(A \cup B \cup C) = \mu(A) + \mu(B) + \mu(C) - (\mu(A \cap B) + \mu(B \cap C) + \mu(C \cap A)) + \mu(A \cap B \cap C)$$

Nu betraktar vi en sfär med radien 1 (i det mer generella fallet med radien *R* behöver vi bara skala areor med R^2) dess area är given av 4π vilket visades redan av Arkimedes (något som varje student numera bör kunna beräkna). För *A, B, C* väljer vi halv-sfärer, som alla uppenbarligen har arean 2π. Om vi snittar två halv-sfärer får vi ett segment, begränsat av två storcirklar (som kan ses som meridianer) och som skär varandra med en vinkel α och vars area uppenbarligen ges av 2α om vi mäter vinkeln i radianer, det mest naturliga vinkelmåttet. Snittet av tre halvsfärer är en sfärisk triangel *T* med vinklar säg α, β, γ och vars union är hela sfären minus den antipodala triangeln till *T* som är kongruent med denna och speciellt har samma area.





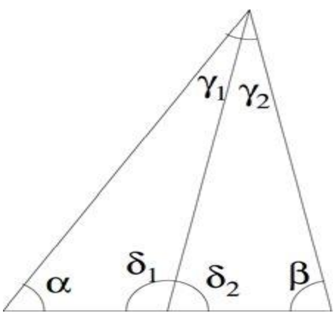
Om vi då sätter in allt i ekvationen ovan erhåller vi

$$3 \bullet 2\pi - 2(\alpha+\beta+\gamma) + \mu(T) = 4\pi\pi - \mu(T)$$

vilket förenklas till

$$\mu(T) = (\alpha+\beta+\gamma) - \pi$$

Detta är en slående och vacker formel och också oväntad. Beviset för den är enkelt men inte utan ett visst mått av svart magi. Men vad betyder detta? Kvantiteten $(\alpha+\beta+\gamma) - \pi$ brukar kallas vinkelöverskottet av en triangel (som kan vara negativt) och på sfären har varje triangel ett strikt positivt överskott, och ju större triangeln är, desto större är överskottet. Vi har i själva verket visat att vinkelöverskottet är additivt, eftersom det ges av arean, men detta kan visas direkt.



De två överskotten ges av $\alpha+\delta_1 + \gamma_1-\pi$ och $\beta+\delta_2+\gamma_2-\pi$ var för sig. Om vi adderar upp dem får vi

$$\alpha + \beta + (\gamma_1 + \gamma_2) + (\delta_1 + \delta_2 - \pi) - \pi$$

som förenklas genom att sätta $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$ och observera att $\delta_1 + \delta_2 = \pi$ till $\alpha + \beta + \gamma - \pi$ vilket utgör vinkelöverskottet $\alpha + \beta + \gamma - \pi$ av den stora triangeln.

Men detta avslöjar vad som verkligen sker bakom kulisserna. Areor och vinkelöverskott av sfäriska trianglar tycks färdas längs parallella spår, kanske på samma? Om varje sfärisk triangel kunde sönderdelas i speciella för vilka de två måtten överensstämmer skulle vi vara klara. Sådana byggstenar existerar, nämligen halvsfärerna (ty ta tre godtyckliga punkter på den storcirkel som begränsar en sådan och vi får en triangel där alla tre sidorna tillsammans utgör en rät linje och således varje vinkel är π. Vinkelöverskottet ges då av $3\pi-\pi = 2\pi$ som också är dess area). Men en triangel kan inte beskrivas som en union av halvsfärer men å andra sidan som komplementet av en sådan, och det var precis detta vi gjorde i vårt bevis. Vad vi ursprungligen såg som svart magi visar sig efter en viss undersökning som det mest naturliga i världen. Beviset i kombination med eftertanken (och i en presentation kunde vi inlett med denna) gör mycket mera än verifierar; det får oss att förstå varför något är sant. Utan sådana åtminstone fläckvisa snilleblixtar av förståelse reduceras matematiken till ett långtråkigt spel.

Hur skall vi tolka detta exempel? Ett naivt intryck många får av matematiken är att man lär sig hur man skall lösa problem systematiskt som i skolan. För det och det problemet går man tillväga på följande sätt etc. När det rör sig om att beräkna arean av något område på sfären, eller mer allmänt på vilken 'kurvig' yta som helst får studenterna lära sig att sätta upp en specifik integral, men att göra detta i praktiken är någonting helt annat och som alla vet som har gjort åtminstone en flyktig bekantskap med integrering erhåller man sällan ett enkelt (enligt någon konvention) svar. Men specifika exempel kan emellertid lösas med slående specifika metoder som exemplet med sfäriska trianglar. Detta enkla exempel, som hade varit tillgängligt för grekerna och moderna människor med ett modikum av matematisk bildning, som vi presenterade är även slående, kanske än mer slående, för en professionell matematiker som stöter på den för första gången och omedveten om att ett sådant enkelt angreppssätt existerar. Beviset som sådant ger en förklaring varför något är sant men inte nödvändigtvis en djupare förståelse. Ett steg i den riktningen ges av observationen att vinkelöverskott (eller mer allmänt vinkeldiskrepans) är additivt och som därmed knyter an till ett fundamentalt tema inom matematiken. Humanister gör ofta en poäng av att kontrastera tekniska förklaringar, som i de naturvetenskaperna, med djupare förståelse såsom varande en mer högtstående verksamhet för dem som engagerar sig i den mänskliga anden, utan att ens bekymra sig om att göra en klar distinktion mellan orden. Här har vi presenterat, och dessutom inom ett enda område, möjliga illustration av de bägge begreppen. Av större vikt är att det visar hur man genom att utgå från något matematiskt intressant blir man medveten om dess vidare förgreningar och hur det kan leda till oväntade saker (vilket framgår ur en något utförligare text, som tyvärr är alltför lång och teknisk för att ingå, men den nyfikne läsaren refereras till bibliografin nedan). Vad som slår matematikern är hur allt inom matematiken hänger ihop, hur skilda och till synes orelaterade områden har ömsesidigt fruktbara tillämpningar[19]. De ofta citerade raderna av William Blake om att se världen i ett sandkorn har sin speciella relevans till matematiken.

Ett annat exempel på matematisk metod är att med de rätta definitionerna kan man trivialisera bevis, ja rentav göra dem närmast tautologiska (se [P]). Sådana eleganta steg tas normalt först när ett område tillåter ett fågelperspektiv och bidrager med ett avslut. Emellertid ingår en hel del fusk och studenter som utfordrats huvudsakligen med sådana näringsämnen får en skev uppfattning om ämnet. Vidare ingår givetvis tekniska beräkningar, som kan ses som en vidareutveckling av Descartes metod, och som för den oinitierade må framstå som både fascinerande och frånstötande i sin obegriplighet. Från en matematikers

[19] Detta är inget som uppstår i studiet av schack från en professionell spelares synpunkt. Man kan ställa frågor om schack av en matematisk natur men de har ringa intresse för någon som är angelägen om att förbättra sin spelförmåga.

synpunkt är de rutin och han må dagligen bli kallad att utföra dem. De korresponderar till verktyg som utgör en del av den oundgängliga verktygslåda en matematiker behöver äga, precis som en rörmokare beror på sin egen (för exemplifiering se [P]).

Det Matematiska Landskapet

Det stora framsteget med kartesiska koordinater var inte att det gav ett systematiskt sätt all lösa gamla klassiska problem utan att det öppnade upp helt nya vistan. Och genom att så göra så utrustade de matematikerna med metoder att tackla de nya problemen som uppkom. I själva verket öppnades en stor del av matematiken upp, många skulle vilja hävda att det gällde dess centrala delar inte bara geometrin; medan studieobjekten formligen exploderade i sin omfattning[20], men det gjorde även möjliga partiella differentialekvationer med sin rikedom på tillämpningar, inte minst i fysiken (vilken vid en viss tid identifierades med studiet av klassiska partiella differential-ekvationer) modern matematik skulle vara oigenkännbar utan detta[21]. I denna essäs anda kommer jag nu att fokusera på en liten detalj.

1964, det år jag fyllde 14, upptäckte jag matematiken; fram till dess hade det bara varit ett skolämne för vilket jag hade en fallenhet och i vilket jag kunde glänsa, så om jag inte sparka en boll eller springa mycket fort kunde jag åtminstone räkna mycket snabbt och rätt, och returnera vad helst som kastades i min famn på en test, oavsett hur svårt. Men denna värld introducerades jag i realskolan i klassisk deduktivt förankrad euklidisk geometri vilket var, som noterats, en uppeggande upplevelse eftersom det visade tankens makt över materien. Tidigt denna sommar läste jag Gamows 'Ett, Två, Tre ... oänd-ligheten' i vilken jag för första gången kom i kontakt med den 4-dimensionella hyperkuben och det måste ha gjort ett intryck på mig ty jag gjorde en modell av den. Denna höst träffade jag på de platonska kropparna i en samling av Martin Gardner's essäer i Scientific American[22] och gjorde kartongmodeller av dem. Jag drömde om att finna deras analogier i fyra dimensioner, men jag saknade uppenbarligen vad som krävdes för detta utan reducerades till att resonera per analogi något som lätt leder vilse om man inte har något sätt att testa sina spekulationer; det remarkabla var dock att jag inte betvivlade den 4-dimensional världens 'verklighet', även om jag insåg att den låg bortom vad som var sensoriskt tillgängligt och som knappast skulle kunna kräva någon fysisk närvaro i vår påtagliga värld. Hur passande att mitt möte med den matematiska platonismen skulle ha förorsakats av de platonska kropparna! Däremot med den kartesianska metoden kan man undersöka, vad som är fallet när man inte kan göra goda fysiska modeller som med vanliga kuben och mäta längder av och vinklar mellan dess längsta diagonaler. I det 4-dimensionella hyperkubfallet får vi resonera som nedanstående.

Sätt hyperkubens hörn till (±1, ±1. ± 1, ±1) (man ser att det måsta vara sexton av dem) i analogi med det två- och tre-dimensionella fallet. De långa diagonalerna, av vilka det finns åtta, är de som förbinder antipodala hörn, kommer antingen att skära varandra i en vinkel av 60° eller i räta vinklat (90°). Om vi låter en diagonal (av vilka det finns åtta) spännas av (1,1,1,1) (eller

---

[20] Man insåg snabbt att linjer var givna av linjära ekvationer och kägelsnitt av kvadratiska. Vad kunde man säga om kurvor givna av kubiska? För att inte tala om högre grad! Den kartesiska metoden tvingade dem på oss.

[21] Ur en logisk synpunkt vad det hela rör sig om är en 'aritmetisering' av geometrin vilket möjliggjorde ändamålsenliga kodifieringar, föga förvånansvärt mycket användbara inom digitaliseringen

[22] ett nummer av vilken jag även kom i kontakt med samtidigt. Jag imponerades av dess 'glassighet' inte minst hos annonserna, och gav mig en direkt försmak av landet bortom oceanen som gick utöver vad den relativt nya TV'n kunde erbjuda.

dess antipodala (—1, —1, —1,1)) inträffar det första fallet (av vilka det finns fyra) när koordinaterna skiljer sig i ett udda antal ställen, och det andra fallet (av vilka det finns tre) när det skiljer sig ett jämnt antal. Man kan dela upp diagonalerna i två komplementära mängder av fyra, så att diagonalerna i var och en är ortogonala med varandra, men skär de övriga med vinkeln 60°. Dessa två mängder av fyra korresponderar till två mängder av åtta hörn, var och en utgörandes en 4-dimensionell version av oktaedern, vilket i någon mening motsvaras hur man kan splittra upp hörnen i en kub i två disjunkta mängder av fyra som utgöres av hörnen till regelbundna tetraedrar.

Detta resultat vi erhåller i fyra dimensioner är trivialt att visa, men mycket svårt att föreställa sig rumsligt med den mänskliga kognitionen. Hade vi levt i en 4-dimensionell värld skulle vi knappast ha undgått att notera det, men kanske haft svårt för att bevisa det, nu upptäcker vi det via ett bevis. Det må finnas många slående geometriska fakta i den 4-dimensionella världen som vi skulle se ’poppa upp’ oombedda men vilka vi måste upptäcka (inte uppfinna) genom undersökningar, systematiska såväl som lekfulla. Dock den naiva ambitionen att försöka erhålla en fysiskt påtaglig känsla för mång-dimensionell geometri är inte bara undflyende utan även felplacerad, och det är inte en matematiska ambition lika lite som perfektionen av huvudräkning eller rumslig intuition för den delen. När studenter undervisas om mång-dimensionella rum, med vilka matematiker arbetar dagligen som varandes det mest naturliga sakerna i världen, görs detta formellt utan några ansatser till multi-dimensionell intuition. I en viss mening kan man hävda att man inte riktigt förstår vad man gör. Detta är oundvikligt i matematiken eftersom den mänskliga kognitionen är som noterad ytterst begränsad. Detta är grunden för talesättet att mycket i matematiken är bortom förståelsen och poängen är att vänja sig vid detta. Formella tekniker leder dig mycket längre bort än vad du kan hoppas förstå. Detta är såväl oundvikligt som en aning ledsamt, och är en återspegling av det allmänna dilemmat i en teknologiskt avancerad civilisation i vilken vi alla använder verktyg som vi inte har någon djupare förståelse av. Hur många läsare kan i någorlunda detalj förklara hur en mobiltelefon fungerar? Och ärligt talar hur många bryr sig? Det föreligger en växande press på unga matematiker i knoppningsstadiet att på relativt kort tid bemästra ett stort antal av sofistikerade tekniker med fara att många av dem kommer att utgöra svarta lådor. Matematisk forskning tenderar att bli modulära, d.v.s. kombinera andras resultat som bitar i ett Meccano utan att gå till rötterna. Men detta är inte bara fallet med matematiken utan, befarar jag, i en än högre grad i andra vetenskaper. En professionell programmerare skriver inte program ’from scratch’ (i motsats till vissa amatörprofessorer). Ändå förblir matematiken i en viss mening ett humanistiskt projekt, i den betydelsen att vad du uttalar dig om har du en ganska intim bekantskap med trots allt. Matematiken är inte ’big-science’ i vilken forskning tenderar att utföras i stora forskningsgrupper ofta med vidlyftig apparatur. Men vem vet det kan utvecklas åt det hållet.

Så låt mig avsluta det hela med ytterligare en matematisk utvikning. Vad hände med problemet, nämligen klassifikationen av de platonska kropparna i högre dimensioner, som jag vagt föreställde mig under mina tonår? Det löstes på 1800-talet av den schweiziske matematikern och gymnasieläraren Ludwig Schäfli, och resultatet är både charmerande och något anti-klimaktiskt. I 2-dimensioner har vi ett oändligt antal, varje regelbunden polygon oavsett antal sidor, utgör ett exempel, och bara dessa. Den liksidiga triangeln och kvadraten kan lätt generaliseras till alla dimensioner. Hyperkuber kan lätt beskrivas såsom spannet av alla hörn med koordinaterna (±1, ±1, … ± 1) (i matematiken talar vi om det konvexa höljet av dessa punkter, i detta fall alla punkter $(a_1, a_2, a_3, \ldots a_{,n})$ med $|a_i| < 1$). Precis som en vanlig kub har hörn, kanter och sidor, som alla är kuber av lägre dimension, gäller samma ska för hyper-kuber. Dess sidor ges av snitt med hyperplanen $x_i = \pm 1$ av vilka det finns 2n (sex i fallet med den klassiska kuben). Mer generellt om i_1, i_2 , i_3 , … i_k utgör *k* distinkta tal, utger de *k* ekvationerna

$x_{i1} = \pm 1$ ... $x_{ik} = \pm 1$ upphov till en hyper-kub av dimension *n-k* och det finns uppenbarligen $2^k(^n{}_k)$ av dessa. Vi kan kodifiera detta i utvecklingen av $(1 + 2x)^n = (1 + 2(^n{}_1)x + 2^2(^n{}_2)x^2 + \ldots + 2^k x^n)$ där koefficienten för x^k ger antalet *n*-k dimensionella hyper-kuber. Om vi sätter *x* = -1 i detta uttryck erhåller vi $(1 + 2 \bullet (-l))^n = (-1)$" som är 1 när *n* är jämnt och -1 annars. I det första fallet ger det eulerkaraktäristiken (se [P]) och i det andra fallet dess negativa således är dess eulerkaraktäristik alltid 1 vilket vi förväntat oss hela tiden ty hyperkuben är produkten av *n* slutna enhetsintervall var och en med eulertalet ett. Hyperplanen med ekvationerna $x_i = \pm 1$ kodifieras med punkterna (0, … ± 1... 0) av vilka antalet är 2n, de spänner den n-dimensionella versionen av oktaedern och ses som dualen till den n-dimensionella hyper-kuben. De *k* dimensionella sidorna av den ena korresponderar till de n-*k* dimensionella sidorna av den andra. Slutligen har vi den enklaste av dem alla, nämligen generaliseringen av den liksidiga triangeln i planet och tetrahedern i rummet spända av de *n*+1 punkterna (0, ... 1, ... 0) i det *n*+1 dimensionella rummet och som är alla ekvidistanta och befinner sig i det *n*–dimensionella hyperplanet $x_0 ...+ x_n = 1$.

Det remarkabla är att det finns två platonska kroppar till i 3-dimensioner, nämligen ikosaedern och dodekaedern, duala till varandra; och tre extra i 4-dimensioner, två duala till varandra och en självdual (som tetraedern och dess generaliseringar). Och detta är allt. Det första är universellt känt bland alla matematiker, och man skulle hoppas en stor del av den bildade allmänheten, det andra är okänt av de flesta matematiker, eller åtminstone avfärdat som en kuriositet; och fastän jag borde vara känslomässigt fästade vi dem har jag bara en flyktig bekantskap med dem[23]. Sensmoralen är att i matematiken har vi inte bara allmänna principer men också en rikedom av specifika individuella objekt vars existens ofta synes mirakulösa och är av stort inneboende intresse genom att uppvisa sofistikerade och oväntade strukturer. Man kan jämföra den med den biologiska världen. Darwin var en mästare på bägge aspekterna och var den första egentligen som presenterade en syntes av biologin, men som även ägnade större delen av sin tid till en detaljerad studie av individualiteter, som utgjorde den empiriska basen för hans syntes. Studiet av regelbundna polytoper är något av en återvändsgränd, det intressanta studiet, till vilket det bidrog med inspiration, är studiet av ändliga grupper. Klassificeringen av alla ändliga grupper med hänvisning till deras enkla komponenter (så kallade enkla grupper) var en av de bedrifter av sent 1900-tals matematik och involverade ett i sanning kollektivt uppdrag, unikt i matematikens historia[24]. Klassifikationen bestod till en del

[23] Jag publicerade en gång i tiden i Normat (en populärvetenskaplig matematisk tidskrift för vilken jag var den ende redaktören vid den tiden), en artikel om hyperkuben och i samband med detta råkade jag av en händelse återupptäcka en så kallade Oktaplexen eller 24-cellen, vars 24 hörn har (bland annat) den enkla presentationen (±1, ±1, ±1,±1), (±2,0,0,0)(0, ±2, 0,0)... (0,0,0, ±2). Om vi normaliseras vektorerna till längd ett, så råkar de utgöra en delgrupp benämnd efter matematikern Hurwitz av enhetskvaternionerna (återigen något speciellt för fyra dimensioner). Genom lämpligt val av projektion på ett plan får vi en vacker graf. Konstruktionen har en motsvarighet för den vanliga kuben genom att ersätta varje sida med en pyramid, men hur vi än ändrar på höjden av pyramiden kan vi inte få en regelbunden polyeder utav det, det händer bara i fyra dimensioner

[24] Givetvis utgör all matematik ett kollektivt arbete, må så vara ett spontant och oplanerat sådant, fallet med klassificeringen av ändliga grupper tog å andra sidan formen av ett förenat korståg under matematikern Daniel Gorenstein’s ledarskap. Denne reste land och rike runt och gav föreläsningar under sent 70-tal och begynnande

av några oändliga familjer samt 26 exceptionella fall som inte passade in i några allmänna mönster och refererades som de sporadiska grupperna. Precis som jag som barn imponerades av påståendet att inte ens Gud hade varit förmögen, hur gärna han än velat, konstruera några platonska kroppar förutom de fem. Ar jag frestad att hävda att det inte kan finnas något universum med att annat antal sporadiska undantag.

Efterord

En filosofisk redogörelse för matematiken som den avslöjas genom sina metoder förfaller lätt till abstrakta verbaliseringar som ger föga fäste för tanken, därför bestämde jag mig för att ta med några exempel på verklig matematik med förhoppningen att då kunna förankra diskussionen i en konkret verklighet. Den som försöker popularisera matematiken både gynnas av bastanta fördelar framför dennes vetenskapliga kolleger och missgynnas av väldiga nackdelar, Nackdelarna är uppenbara, läsare behöver knappast instrueras av vad är en galax (och om så kan en rad räcka), eller fisk, eller vadhelst annan intressant objekt att studera och stimulera läsarens fantasi. I matematiken är t.o.m. de mest basala objekt okända och långt ifrån tillgängliga eller benägna att intressera den oinvigde. Men å andra sidan måste läsaren i andra vetenskapsfält ta allting på orden. Författaren blir till en reporter och hans läsekrets har ingen möjlighet att bevista 'brottsplatsen[1] (det finns inget meningsfullt sätt att erbjuda 'övningar[1]); medan i matematiken kan i princip argumenten läggas fram för var och en att bedöma. Sant nog, för den mesta av matematiken kräver detta förkunskaper och i själva verket är få matematiker kompetenta nog att bedöma arbeten i matematiska områden de inte själva är förtrogna med, dock finns det en omfattande gemensam grund. Uppfattningen att man kan lära sig matematik upp till ett visst stadium och sedan vara utrustad att hantera allt som dyker upp, precis som förtrogenheten med de fyra räknesätten gör dig kompetent att utföra vilken uträkning som helst som är baserad på dessa, är uppenbarligen naiv. På en elementär nivå kan man fråga huruvida någon har problem med matematiken eller inte, men detta blir meningslöst längre fram. En matematiker som inte kämpar med matematiken är ingen matematiker utan endast någon som producerar rutinarbeten, må de vara så kompetenta som helst.[25]

Den brittiske matematikern G. H. Hardy erbjuder i sin klassiska bok A *mathematician's Apology* några godbitar av matematiskt resonerande, inklusive Euklides bevis för existensen av oändligt många primtal, med baktanken, misstänker jag, att om läsaren inte blir upphetsad av dessa är denne bortom all räddning. Dessa exempel är mer i formen av propagerande än att ge någon realistisk insyn i vad matematiker verkligen gör. Min förhoppning har varit att genom att ge något mer involverade exempel, som också på något sätt hänger samman, kan jag hoppas att lyckas med att ge en mer realistisk bild utan att helt offra vare sig tillgänglighet eller trogenheten med originalet. Ingen lär lära sig någon fysik från populärvetenskapliga böcker på grund av den upplevda nödvändigheten att 'förenkla' (dumbing down) vilket i slutändan gör materialet lika oförståeligt för såväl lekmannen som experten. Vi vet alla att djävulen dväljs bland detaljerna. Analogier och metaforer är utmärkta, ibland även

---

80-tal om framstegen, och drog sig inte för att hävda att så och så många procent hade bevisats. Slutligen förelåg ett komplett bevis som innefattade tio-tusentals tidskriftssidor.

[25] Man kan jämföra med vissa bästsäljande romanförfattare som med stor iver skriver en roman på några veckor. Man skall inte förringa deras skicklighet utan tvärtom; men deras arbeten är mer i formen av vad hantverkare gör, ty enligt den brittiske filosofen R.G.Collingwood, vet dessa vad de gör från första början.

oundgängliga, men skall aldrig uppfattas bokstavligt eftersom de då bara blir fåniga. Min ambition har inte varit att färdigställa en övergripande översikt över matematiken, vars variationsrikedom är oanad för de flesta, men för att presentera material för att belysa viktiga aspekter av matematiken, om än på en modest nivå.

Bibliografi

The Mathematical Experience *P.J. Davies R. Hersh,* Houghton Mifflon, Boston, 1981

Regular Polytopes *H.M.S. Coxeter,* Dover Publications, New York, 1973

Ett, Två, Tre ... Oändligheten *G. Gamow,* Bonniers 1949 (pocketupplaga i Prisma tidigt 60-tal)

Art and Illusion *E.H. Gombrich,* Phaidon, Oxford, 1980

A Mathematician's Apology *G.H. Hardy,* Cambridge University Press, London, **1969**

The Road to Reality *R. Penrose,* Jonathan Cape, London 2004

How to Solve it *G. Polya,* Princeton University Press, Princeton, 1973

From Angular excess to Curvature, Euler characteristics and Gauss- Bonnet *U. Persson* www.math.chalmers.se/~ulfp/AExcess.pdf